Sphères des combles

Version du 06/09/2010

David Pigeon

Théorème 1

Le nombre de sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre $\mathcal{T}$ non réduit à un point est compris entre cinq et huit.

Notations et conventions pour un tétraèdre $\mathcal{T}$:

- on note $I := \{1, \dots, 4\}$,
- un **tétraèdre** $\mathcal{T}$ (non réduit à un point) est la réunion de quatre hyperplans affines $H_1, H_2, H_3, H_4 \subset \mathbb{R}^3$ (les **faces** de $\mathcal{T}$) tels que $\bigcap_{i\in I} H_i = \varnothing$ et pour tout $j \in I$, $\bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} H_i = \{x_j\}$ avec les x_j distincts (voir figure 1a)). L'ensemble $\{x_i\}_{i\in I}$ forme un repère barycentrique donc tout point $x \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$ avec $\sum_{i\in I} \mu_i = 1$. Les éléments μ_i avec $i \in I$, sont appelés les **coordonnées barycentriques** de x. En terme de coordonnées barycentriques

$$\mathcal{T} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, x = \sum_{i\in I} \mu_i x_i, \exists j \in I, \mu_j = 0 \right\}$$

- le **tétraèdre associé** à $\mathcal{T}$ est le vrai tétraèdre associé au tétraèdre $\mathcal{T}$ (voir figure 1b)). En terme de coordonnées barycentriques, le tétraèdre associé à $\mathcal{T}$ correspond à

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3, x = \sum_{i\in I} \mu_i x_i, \exists j \in I, \mu_j = 0, \forall k \in I\setminus\{j\}, \mu_k \geq 0 \right\} \subset \mathcal{T}$$

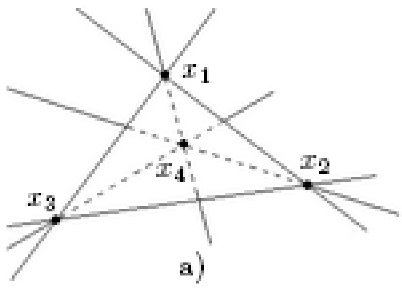

FIGURE 1 – a) le tétraèdre $\mathcal{T}$, b) le tétraèdre associé à $\mathcal{T}$.

- pour tout $i \in I$, l'hyperplan affine H_i est le noyau d'une forme affine f_i de forme linéaire associée $\overrightarrow{f_i}$, on a donc $\mathcal{T} = \bigcup_{j\in I} H_j = \bigcup_{j\in I} f_j^{-1}(\{0\})$. Quitte à multiplier par une constante non nulle, on suppose que $\left\|\overrightarrow{f_i}\right\| = 1$ pour tout $i \in I$,
- il y a quatre parties associées à $\mathcal{T}$ qui vont nous intéresser :

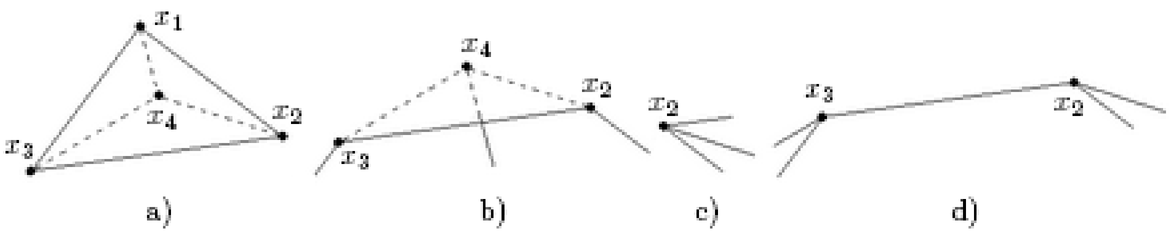

FIGURE 2 – a) l'intérieur, b) un tronc, c) un trièdre , d) le comble $C(x_2, x_3)$.

1) l'**intérieur** associé à $\mathcal{T}$ est l'endroit où les coordonnées barycentriques sont strictement positives (voir figure 2a)). On note V le volume de l'intérieur et a_1 l'aire de la face $x_2x_3x_4$, de même pour a_2, a_3 et a_4 ;
2) les **troncs** associés à $\mathcal{T}$ qui sont au nombre de quatre sont les endroits où trois coordonnées barycentriques sont strictement positives et une strictement négative. Par exemple, si $x = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$ est dans le tronc de la figure 2b) alors $\mu_2, \mu_3, \mu_4 > 0$ et $\mu_1 < 0$;
3) les **trièdres** associés à $\mathcal{T}$ qui sont au nombre de quatre sont les endroits où trois coordonnées barycentriques sont strictement négatives et une strictement positive. Par exemple, si $x = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$ est dans le trièdre de la figure 2c) alors $\mu_2 > 0$ et $\mu_1, \mu_3, \mu_4 < 0$;

4) les **combles** associés à $\mathcal{T}$ qui sont au nombre de six sont les endroits où deux coordonnées barycentriques sont strictement positives et deux strictement négatives. Par exemple sur la figure 2d), on est dans le comble que l'on note $C(x_2, x_3)$, si $x = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$ est dans ce comble alors $\mu_2, \mu_3 > 0$ et $\mu_1, \mu_4 < 0$. Le **comble opposé** à $C(x_2, x_3)$ est $C(x_1, x_4)$.

Preuve : Soient $w \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{j \in I}$ et $\mathcal{S}$ une sphère de centre w et de rayon r tangente aux quatre plans de $\mathcal{T}$ (*ie* $|f_1(w)| = |f_2(w)| = |f_3(w)| = |f_4(w)| = r$). Soient x de coordonnées barycentriques $(\mu_j)_{j \in I}$ et $i \in I$, on a par le lemme 2(i)

$$d(x, H_i) = \frac{|f_i(x)|}{\left\| \overrightarrow{f_i} \right\|} = |f_i(x)| = \left| f_i\left(\sum_{j \in I} \mu_j x_j \right) \right| = \left| \sum_{j \in I} \mu_j f_i(x_j) \right|$$

mais $f_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon, donc

$$d(x, H_i) = |\mu_i| \, |f_i(x_i)| \tag{1}$$

En prenant $x = x_i$ dans (1), on a $d(x_i, H_i) = |f_i(x_i)| = 3V/a_i$ car $V = d(x_i, H_i) a_i / 3$ (voir lemme 2(ii)). En prenant ensuite $x = w$ dans cette même relation (1), on a avec le lemme 2(i) :

$$|f_i(w)| = d(w, H_i) = |\lambda_i| \, |f_i(x_i)| = \frac{3|\lambda_i| V}{a_i}$$

D'où $|f_1(w)| = |f_2(w)| = |f_3(w)| = |f_4(w)| = r$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ est équivalent au système

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} \frac{|\lambda_1|}{a_1} = \frac{|\lambda_2|}{a_2} = \frac{|\lambda_3|}{a_3} = \frac{|\lambda_4|}{a_4} = \frac{r}{3V} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{array} \right.$$

Pour tout $j \in I$, λ_j est non nul car w n'appartient pas au plan H_j. Supposons par exemple que $w \in H_1$ alors $\mathcal{S}$ serait de rayon nul pour qu'elle soit tangente à H_1 et donc $\mathcal{S}$ est tangente aux quatre plans (*ie* $w \in \bigcap_{i \in I} H_i = \varnothing$) car $r = 0$, impossible.
On a maintenant plusieurs cas à vérifier suivant l'endroit où est le centre w de $\mathcal{S}$:

1) si w est dans l'intérieur : pour tout $i \in I$, $\lambda_i > 0$ est positive, alors le système (E) nous donne $a_i = 3\lambda_i V / r$, d'où

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} \frac{3\lambda_i V}{r} = \frac{3V}{r}$$

ainsi $r = 3V / \sum_{i \in I} a_i$. On a donc montrer que dans l'intérieur de $\mathcal{T}$, il existe une unique sphère de rayon $r = 3V / \sum_{i \in I} a_i$ ($\sum_{i \in I} a_i \neq 0$ car $\mathcal{T}$ n'est pas réduit à un point),

2) si w est dans un des troncs : trois des λ_i sont positives et une négative. Supposons par exemple $\lambda_4 < 0$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, on sait par lemme 2(iii) que $a_4 < a_1 + a_2 + a_3$ d'où (E) donne par le même raisonnement qu'en 1) un unique rayon r valant $3V/(a_1 + a_2 + a_3 - a_4) > 0$. De même dans les autres troncs ;

3) si w est dans un des trièdres : trois des λ_i sont négatives et une positive. Supposons par exemple $\lambda_4 > 0$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, alors par le même raisonnement que dans 2), on a toujours $a_4 < a_1 + a_2 + a_3$ et le rayon r serait donné par $r = 3V/(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4) < 0$ impossible. De même dans les autres trièdres. Donc il n'y a pas de telle sphère dans les trièdres ;

4) si w est dans un des combles : par exemple s'il est dans $C(x_1, x_2)$ (*ie* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3, \lambda_4 < 0$) alors par le même raisonnement qu'en 1) s'il existe une telle sphere $\mathcal{S}$ dans ce comble alors le rayon r vaut $r_{12} = 3V/(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$, toute l'idée est alors de voir le signe du dénominateur de r_{12}. On remarque que s'il y a une sphère dans le comble opposé $C(x_3, x_4)$ son rayon est donné par $r_{34} = -r_{12}$, donc il ne peut pas avoir une telle sphère $\mathcal{S}$ dans un comble et dans son comble opposé. Ainsi il y a au maximum trois sphères dans les combles.
Supposons que l'on ait la relation entre les aires $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$, on a six cas à distinguer :
   (a) si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, alors pour tout $i, j \in I$ le dénominateur de r_{ij} est nul, donc il n'existe pas de telle sphère $\mathcal{S}$ dans les combles ;
   (b) si $a_1 = a_2 > a_3 = a_4$, alors pour $i, j \in I$ le seul r_{ij} de dénominateur strictement positif est r_{12}. D'où l'on a une telle sphère $\mathcal{S}$ dans le comble $C(x_1, x_2)$;
   (c) si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 > a_4$ et $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, alors pour $i, j \in I$ les seuls r_{ij} de dénominateurs strictement positifs sont r_{12} et r_{13}. D'où l'on a deux telles sphères $\mathcal{S}$ dans les combles $C(x_1, x_2)$ et $C(x_1, x_3)$;
   (d) si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 > a_4$ et $a_1 + a_4 > a_2 + a_3$, alors pour $i, j \in I$ les seuls r_{ij} de dénominateurs strictement positifs sont r_{12}, r_{13} et r_{14}. D'où l'on a trois telles sphères $\mathcal{S}$ dans les combles $C(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_3)$ et $C(x_1, x_4)$;
   (e) si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 > a_4$ et $a_1 + a_4 < a_2 + a_3$, alors pour $i, j \in I$ les seuls r_{ij} de dénominateurs strictement positifs sont r_{12}, r_{13} et r_{23}. D'où l'on a trois telles sphères $\mathcal{S}$ dans les combles $C(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_3)$ et $C(x_2, x_3)$;
   (f) si $a_1 > a_2 \geq a_3 = a_4$, alors pour $i, j \in I$ les seuls r_{ij} de dénominateurs strictement positifs sont r_{12}, r_{13} et r_{14}. D'où l'on a trois telles sphères $\mathcal{S}$ dans les combles $C(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_3)$ et $C(x_1, x_4)$.

Donc en récapitulant, on a une sphère dans l'intérieur, quatre dans les troncs et entre zéro et trois dans les combles, d'où le résultat. □

Lemme 2

(i) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ de forme affine f et de forme linéaire associée $\overrightarrow{f}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\left\|\overrightarrow{f}\right\|}$$

(ii) Le volume V d'une pyramide de base d'aire B et de hauteur h est $Bh/3$.
(iii) Avec les notations données pour le tétraèdre $\mathcal{T}$, on a pour tout $j \in I$, $a_j < \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i$.

Preuve : (i) On note $f : (\alpha, \beta, \gamma) \to a\alpha + b\beta + c\gamma + d$, alors un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de H est donné par $\overrightarrow{n}^t = \overrightarrow{f} = (a, b, c)$. Soient maintenant $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $z = (\alpha', \beta', \gamma')$ la projection de x sur H alors

$$\begin{aligned} d(x, H) = d(z, x) &= \frac{\left|(\overrightarrow{zx}|\overrightarrow{n})\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|} \\ &= \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma - (a\alpha' + b\beta' + c\gamma')|}{\left\|\overrightarrow{f}\right\|} \\ &= \frac{|f(x)|}{\left\|\overrightarrow{f}\right\|} \text{ car } z \in H \end{aligned}$$

(ii) A la hauteur $y \in [0, h]$ (voir Figure 3), l'aire de la tranche de la pyramide est $\mathcal{A}(y) = B((h-y)/h)^2$ (le facteur d'homothétie $(h - y)/h$ est donné par le théorème de Thalès).

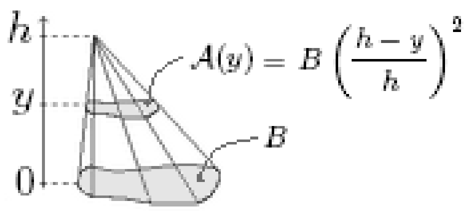

Figure 3 – Pyramide de base d'aire B et de hauteur h.

Ainsi

$$V = \int_0^h \mathcal{A}(y)dy = \int_0^h B\left(\frac{h-y}{h}\right)^2 dy = \frac{Bh}{3}$$

(iii) Sans perte de généralités, prenons $j = 4$. On regarde la projection du tétraèdre associé sur l'hyperplan H_4. Toutes les faces du tétraèdre associé mises à part la face $x_1x_2x_3$ ont des aires projetées sur H_4 strictement plus petites que les aires des faces. Supposons le contraire, par exemple que la face $x_1x_2x_4$ d'aire a_3 est une aire projetée b_3 sur H_4 telle que $b_3 \geq a_3$. Appelons x_4' le projeté de x_4 sur H_4 et x_4'' le projeté de x_4' sur H_3. Par (ii), en calculant de deux manières le volume V' du tétraèdre $x_1x_2x_4x_4'$, on a $3V' = b_3 d(x_4, x_4') = a_3 d(x_4', x_4'')$, d'où par l'hypothèse, on a $d(x_4, x_4') \leq d(x_4', x_4'')$. Ainsi par minimalité du projeté de x_4' sur H_3, on en déduit que $x_4 = x_4''$ (*ie* H_4 parallèle à H_3), contradiction. Donc $b_3 < a_3$.
Enfin la somme des aires des faces projetées est supérieure ou égale à a_4 car tout point de la face $x_1x_2x_3$ est le projeté d'un point du tétraèdre associé, d'où le résultat.

□

Référence

M. Berger, *Géométrie*, Tome 1, 10.6, Nathan Université (1991).