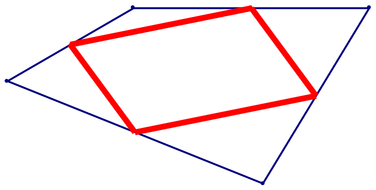
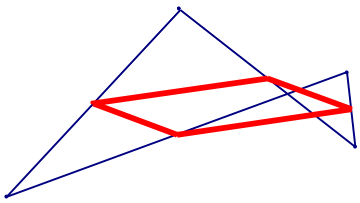
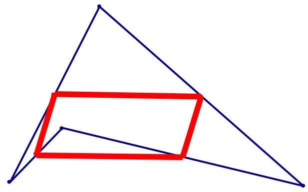
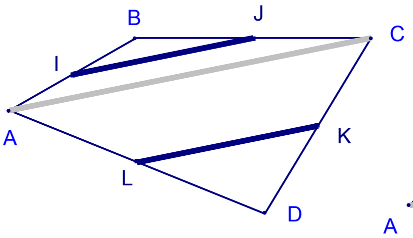
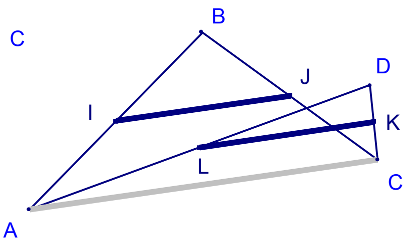
# Les théorèmes de Varignon

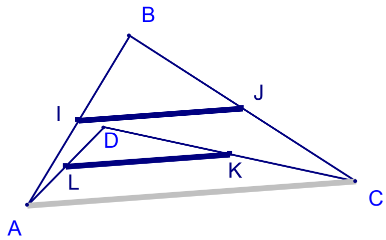
**Théorème 1 : Les milieux des côtés d'un quadrilatère (pris dans l'ordre des côtés) sont les sommets d'un parrallélogramme (parallélogramme de Varignon).**

Preuve : Dans le triangle ABC, d'après le théorème de la droite des milieux, (IJ) est parallèle à (AC).
De même, dans le triangle ADC, (KL) est parallèle à (AC). (IJ) et (KL) sont donc parallèles.
En utilisant les triangles BAD et BCD, on montre de même que (IL) et (JK) sont parallèles.
IJKL a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme.

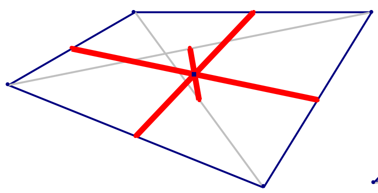
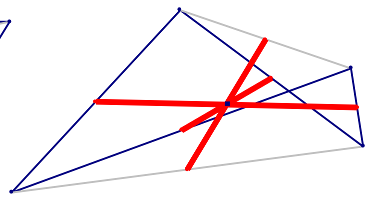
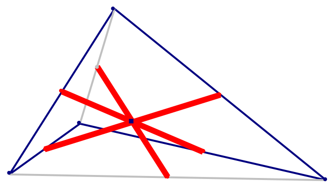




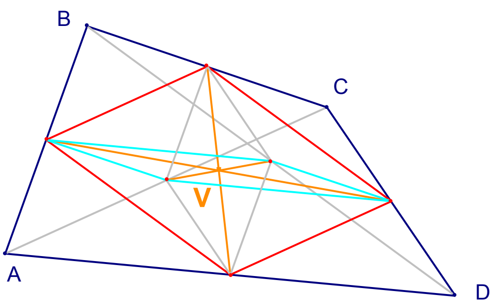


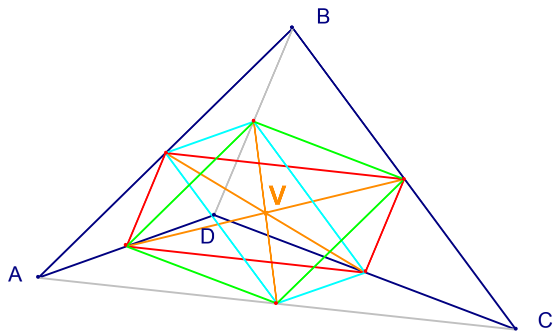

Remarques :
La preuve est valable dans les trois cas ; la position relative des triangles change d'une figure à l'autre, mais les côtés opposés de IJKL restent parallèles aux diagonales de ABCD.
En appliquant le théorème du segment des milieux aux mêmes triangles, on montre que les côtés opposés de IJKL ont des longueurs moitiés de celles des diagonales de ABCD.

**Théorème 2 : Dans tout quadrilatère, les trois segment définis par les milieux de deux côtés opposés et par les milieux des diagonales ont même milieu (point de Varignon).**

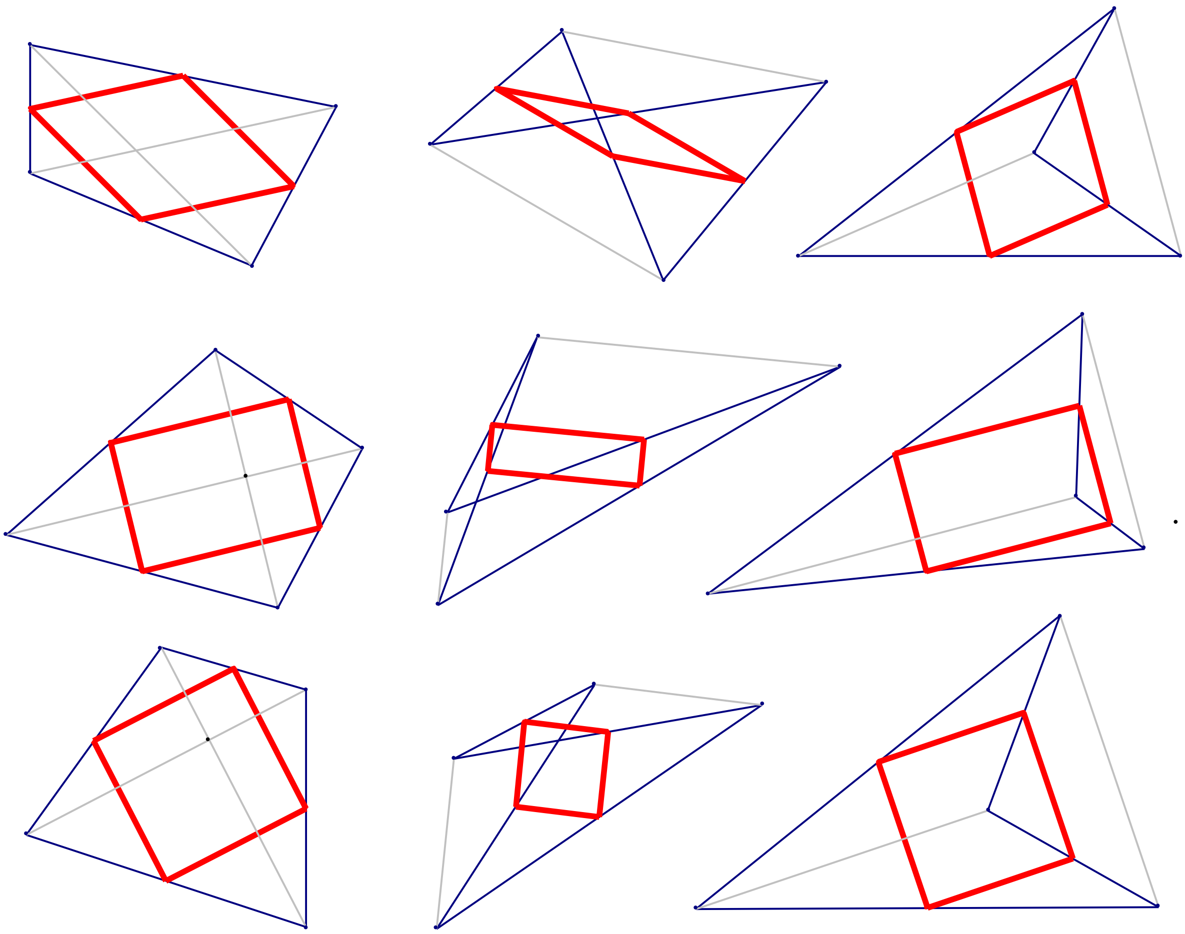




Preuve : Les quatre points A, B, C, et D définissent trois quadrilatères ABCD, ABDC et ACBD.
(Si D est extérieur au triangle ABC, l'un est convexe, les deux autres sont croisés ;
si D est à l'intérieur de ABC, les trois sont de même type : ni convexes, ni croisés)
Les trois parallélogrammes de Varignon de ces quadrilatères ont, deux à deux, une diagonale en commun ; ils ont donc même centre de symétrie qui est le milieu commun V de leurs diagonales.
Remarques : V est défini par les quatre points A, B, C, et D, indépendamment de leur ordre.
Ce n'est généralement pas un centre de gravité (comme le milieu d'un segment ou le point de concours des médianes d'un triangle).

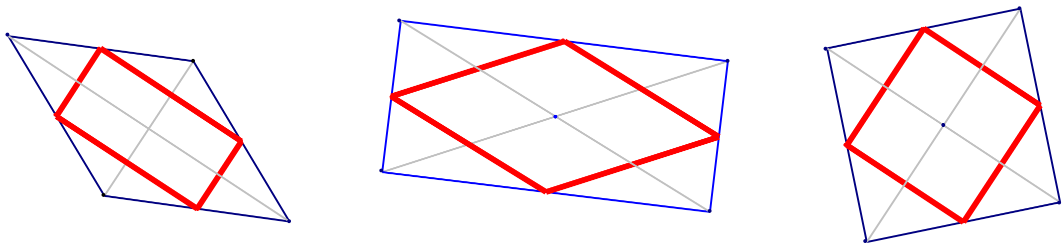




Dans la preuve du théorème 1, on a montré que les côtés opposés du parallélogramme IJKL dépendent (en direction et en longueur) des diagonales du quadrilatère ABCD.
Si ces diagonales ont même longueur, alors IJKL est un losange ; si elles sont perpendiculaires, alors IJKL est un rectangle (si elles vérifient les deux propriétés, alors IJKL est un carré).



Un losange définit un rectangle ; un recrangle définit un losange ; un carré définit un carré.



Si les diagonales du quadrilatère (croisé) sont parallèles, alors le parallélogramme est aplati.
Si de plus les diagonales de ce quadrilatère ont aussi même longueur,
alors le parallélogramme est dégénéré (deux sommets opposés sont confondus).