droite et cercle d'Euler d'un triangle

Pré-requis (résultats concernant les triangles) :

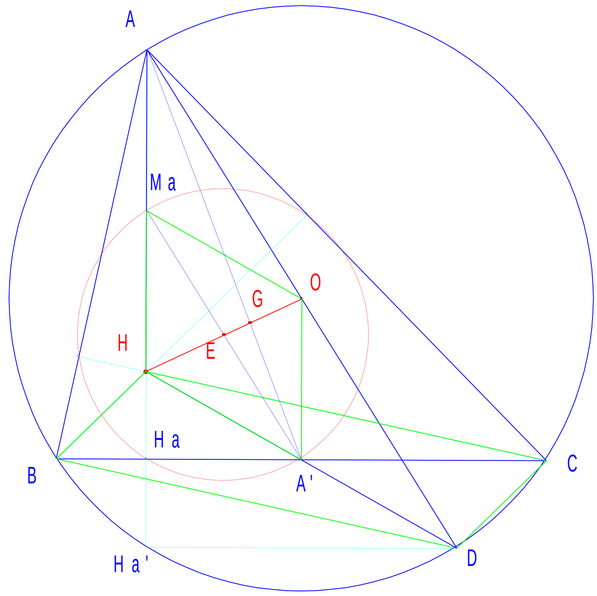
Les trois premiers centres d'un triangle :
- les médiatrices des côtés sont concourantes au centre du cercle circonscrit,
- les hauteurs sont concourantes en l'orthocentre,
- les médianes sont concourantes au centre de gravité situé au tiers de chaque médiane en partant de son pied.

Propriété caractéristique d'un triangle rectangle : le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse (il est inscrit dans un demi-cercle).

Les trois théorèmes des milieux :
- la parallèle à un côté, passant par le milieu d'un autre côté, coupe le troisième en son milieu,
- la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté (réciproque),
- le segment d'extrémités les milieux de deux côtés a une longueur moitié de celle du troisième côté.

Nous allons prouver les trois théorèmes suivants : (1 et 2 sont dus à Euler, 3 est cadeau !)

Dans tout triangle ABC (non équilatéral) on note O le centre du cercle circonscrit (de rayon r), H l'orthocentre et G le centre de gravité. On a alors :
1- O,G et H sont alignés dans cet ordre (droite d'Euler) et GH=2GO,
2- les pieds des médianes (milieux des côtés) et des hauteurs, et les milieux de [HA], [HB] et [HC], appartiennent au cercle de centre E, milieu de [HO], et de rayon r/2 (cercle d'Euler ou cercle des neuf points),
3- les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC appartiennent au cercle circonscrit.



ABC est un triangle ni isocèle ni rectangle ; O est le centre de son cercle circonscrit (de rayon r) et H son orthocentre.
A' est le milieu de [BC], donc le centre de gravité G est situé au tiers de la médiane [A'A].
Soit D diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit.

BHCD est un parallélogramme : (HC)//(BD) et (HB)//(CD) parce que perpendiculaires respectivement à (AB) et à (AC) ; en effet, ABD et ACD sont rectangles car inscrits dans un demi-cercle. A' est donc milieu de la diagonale [HD].
[A'A] est alors une médiane de ADH, donc G est aussi centre de gravité de ADH ; G appartient ainsi à [HO] qui est une autre médiane de ADH, et GH=2GO (théorème des médianes dans ADH) .

Soit E le milieu de [HO] et Ma le milieu de [HA]. HA'OMa est un parallélogramme de centre E ; en effet ses côtés opposés sont parallèles d'après le théorème de la droite des milieux dans ADH.
E est centre du cercle circonscrit au triangle rectangle A'HaMa, d'où EA'=EHa=EMa=r/2 ; la dernière égalité découle du théorème du segment des milieux dans AOH.
On peut raisonner de même avec D' (resp. D") diamétralement opposé à B (resp. à C), ce qui prouve que le cercle ci-dessus (centre E, rayon r/2) passe aussi par B', Hb et Mb (resp. par C', Hc et Mc).

La hauteur (AHa) recoupe le cercle circonscrit en Ha'. ADHa', inscrit dans un demi-cercle, est alors rectangle en Ha'.
(A'Ha)//(DHa') comme perpendiculaires à (AH), et A' est milieu de [HD], donc d'après le théorème des milieux dans HDHa' Ha est milieu de [HHa']. Ha' est donc le symétrique de H par rapport à (BC).
En raisonnant avec D' et D" on prouve de même que les symétriques Hb' et Hc' de H par rapport à (AC) et (AB) appartiennent aussi au cercle circonscrit.

Cas particuliers (certains des neuf points du cercle d'Euler sont confondus) :

ABC isocèle en A (A'=Ha) : la droite d'Euler est l'axe de symétrie (AA') ; le cercle d'Euler est tangent à (BC) en A' ; il reste huit points distincts.

ABC équilatéral (G=O=H=E) : il n'y a plus de droite d'Euler ; le cercle d'Euler est le cercle inscrit tangent aux côtés en leurs milieux ;
six points distincts : A'=Ha, B'=Hb, C'=Hc, Ma, Mb, Mc.

ABC rectangle en A (H=A et O=A') : la droite d'Euler contient la médiane [HO] qui est un diamètre du cercle d'Euler de rayon r/2=BC/4 ;
cinq points distincts : A', B'=Mb, C'=Mc, Ha, Hb=Hc=Ma.