Topologie des espaces de matrices

1 Topologie des espaces vectoriels normés

Dans toute la suite E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Normes et distance

Définition 1. (norme) On appelle norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :
(N1) (définie) $\forall x \in E\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
(N2) (homogène) $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(N3) (inégalité triangulaire) $\forall (x, y) \in E^2\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Exemple :
1) $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$.
2) Sur $E = \mathbb{K}^n$ les quantités suivantes définissent des normes :

$$(p > 1) \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

3) Sur $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ les quantités suivantes définissent des normes :

$$(p > 1) \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{et } \|f\|_\infty = \max_{t \in [a;b]} |f(t)|.$$

Prop 1 (Distance associée)**.** *Soit (E, N) un evn.*
L'application $d_N : E^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $d_N(x, y) = N(x - y)$ définie une distance sur E.

Démonstration. Il suffit de vérifier les axiomes d'une distance :
(d1) symétrie $d(x, y) = d(y, x)$
(d2) séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(d3) inégalité triangulaire $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. □

Remarque : Un evn est donc un espace métrique donc topologique.

Définition 2. Soit $(E, \|.\|)$ un evn.
1) La boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble : $B(x, r) = \{y \in E \quad | \quad \|x - y\| < r\}$.
2) On dit que $O \subset E$ est ouvert dans E si $\forall x \in O \quad \exists r > 0 \quad$ tel que $\quad B(x, r) \subset O$.

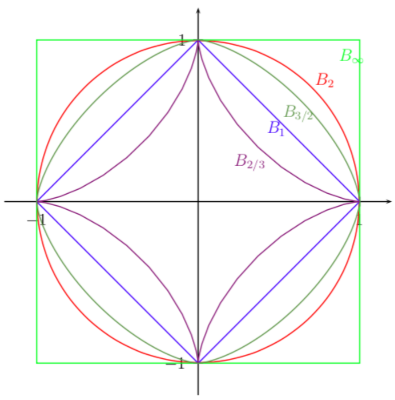


FIGURE 1 – Quelques boules unités pour $\|.\|_p$ avec $p = 2/3, 1, 3/2, 2, \infty$,

1.2 Limite et continuité

Prop 2. *(limite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $v \in E$. Les propositions suivante sont équivalentes :*
(i)$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans E
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - v\| = 0$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Prop 3 (Continuité)**.** *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn et $f : E \to F$.*
Les propositions suivante sont équivalentes :
(i) f est continue de E dans F
(ii) $\forall v_0 \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall v \in E, \|v - v_0\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(v) - f(v_0)\|_F < \varepsilon$
(iii) Pour tout $v_0 \in E$ et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers v_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(v_0)$ dans F.

Démonstration. Laissée en exercice. □

Remarque : le (ii) s'écrit aussi de la façon suivante :

$$\forall v_0 \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad f(B(v_0, \delta)) \subset B(f(v_0), \varepsilon).$$

Prop 4 (Continuité de la norme)**.** *La norme d'un evn est une application continue.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que par inégalité triangulaire on a :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad | \quad \|u\| - \|v\| \quad | \leq \|u - v\|.$$

La norme est donc 1-lipscitzienne donc continue. □

1.3 Applications linéaires continues

On considère $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn.
Notation : $\mathcal{L}(E, F)$ est l'algèbre des applications linéaires de E dans F.

Prop 5. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) T est continue
(ii) T est continue en 0
(iii) $\exists C > 0$ telle que $\forall x \in E$ $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

Notation : $\mathcal{L}_c(E, F)$ est la sous-algèbre des applications linéaires continues de E dans F.

Prop 6 (Norme subordonnée)**.** *L'application $|||.|||_{E,F} : \mathcal{L}_c(E, F) \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$|||T|||_{E,F} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F$$

définie une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée norme subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

Démonstration. Il suffit de vérifier les 3 axiomes d'une norme. □

Remarque : Par définition de la norme $|||.|||_{E,F}$, on a

$$(1)|||Id|||_{E,F} = 1, \quad (2)\|T(x)\|_F \leq |||T|||_{E,F}\|x\|_E.$$

Notation : Lorsque $E = F$ on note $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Prop 7. *(Composition)*
Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois evn et $f, \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$.
Alors

$$|||g \circ f|||_{E,G} \leq |||f|||_{E,F}|||g|||_{F,G}$$

En particulier, $(\mathcal{L}_c(E), +, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors on a

$$\|g \circ f(x)\| \leq |||g|||_{F,G}\|f(x)\|_F \leq |||g|||_{F,G}|||f|||_{E,F}\|x\|_E.$$

D'où l'inégalité en divisant par $\|x\|_X$ et en passant à la borne sup. □

1.4 Normes équivalentes

Définition 3. (normes équivalentes) On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes s'il existe $c, C > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x).$$

Prop 8. *La relation « être équivalent à »est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

Remarque : Les topologies associées à 2 normes équivalentes sur E sont égales. Par exemple :

Prop 9. *Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E alors :*

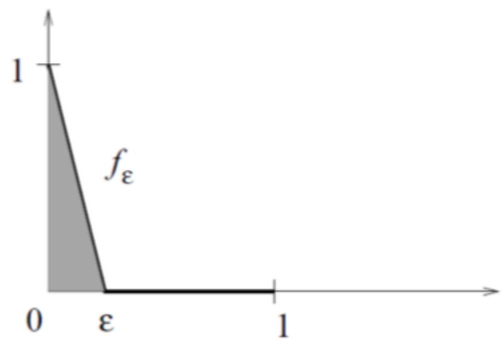
$$u_n \to \ell \text{ pour } N_1 \Leftrightarrow u_n \to \ell \text{ pour } N_2.$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 1. *Si E est de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Contre-exemple en dimension infinie : Sur $E = \mathcal{C}([0;1])$ les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
1) On a évidemment $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$.
2) Soit f_ε définie par :



Dans ces conditions on a $\|f_\varepsilon\|_1 \to 0$ alors que $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$.

Corollaire 1. *Si E est de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.*

Démonstration. Comme toutes les normes sont équivalentes, quitte à fixer une base de E, il suffit de le montrer pour la norme N_∞ sur E. Soit $T : E \to F$ une application linéaire et $(e_1, ...e_n)$ une base de E.
Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors par inégalité triangulaire :

$$\|T(x)\|_F = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right\|_F \leq N_\infty(x) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\|_F}_{:=C} = C.N_\infty(x)$$

Ceci prouve la continuité de T. □

1.5 Espaces de Banach

Définition 4. (suites de Cauchy) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est appelée suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Prop 10. *(i) Toute suite convergente est de Cauchy.*
(ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Laissée en exercice. $\square$

Définition 5. (Espace de Banach) On dit que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si toute suite de Cauchy de E converge.

Exemple : $(\mathbb{K}, |.|)$ est un espace de Banach.

Prop 11. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach pour n'importe quelles normes.*

Théorème 2. *L'espace $(\mathcal{C}([a;b]), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

Théorème 3. *Si $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach alors $(\mathcal{L}_c(E), |||.|||_{E,E})$ est une algèbre de Banach.*

Séries normalement convergentes

Définition 6. (séries normalement convergentes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que la série de terme général $\sum u_n$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$.

Théorème 4. *(caractérisation des espaces de Banach)*
Un evn $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.