Quelques éléments de théorie musicale

Alban DA SILVA

Enseignant CPGE LGN - Laboratoire SPHERE, Paris 7

1. La musique : un des problèmes fondateurs de la science.
2. Entendre les rapports : Pythagore
3. Tempérament égal et conséquence

Objectif de la présentation

Cette présentation est le fruit de plusieurs mémoires de Master 1 que j'ai encadrés à l'ESPE de Nouvelle-Calédonie. Le thème « Mathématiques et musiques » est propice non seulement à l'approfondissement disciplinaire et inter-disciplinaire, mais aussi à faire émerger des questions d'ordre épistémologique. Ce n'est donc guère étonnant qu'il figure dans les programmes du nouvel enseignement scientifique de première. J'ai fait le choix de développer deux questions qui peuvent animer un tel enseignement :

- Pourquoi il y a t'il douze notes dans la musique occidentale ?
- Pourquoi la largeur des cases d'une guitare forme une suite géométrique ?

Lors de mes recherches j'ai utilisé principalement les références suivantes :

James Murray Barbour. *Tuning and temperament: A historical survey.* Courier Corporation, 2004.

Edward M Burns. “Intervals, scales, and tuning”. In: *The psychology of music.* Elsevier, 1999, pp. 215–264.

Edward Dunne and Mark McConnell. “Pianos and continued fractions”. In: *Mathematics Magazine* 72.2 (1999), pp. 104–115.

Section 2

La musique : un des problèmes fondateurs de la science.

Pythagore ($\sim$ - 550 Av.JC)

Harmonie chez les Grecs

Platon - La république, VII, 530 ($\sim$ - 400 av.JC)

Il semble que comme les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles l'ont été de même pour les mouvements harmoniques et que ces sciences sont soeurs, comme le disent les Pythagoriciens et comme nous l'admettons avec eux.

Harmonie chez les Grecs

Platon - La république, VII, 530 (~ - 400 av.JC)

Il semble que comme les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles l'ont été de même pour les mouvements harmoniques et que ces sciences sont soeurs, comme le disent les Pythagoriciens et comme nous l'admettons avec eux.

$[\alpha\rho\mu o\zeta\omega]$, *armozo*: unir, joindre .

Harmonie chez les Grecs

Platon - La république, VII, 530 ($\sim$ - 400 av.JC)

Il semble que comme les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles l'ont été de même pour les mouvements harmoniques et que ces sciences sont soeurs, comme le disent les Pythagoriciens et comme nous l'admettons avec eux.

$[\alpha\rho\mu o\zeta\omega]$, *armozo*: unir, joindre .
Lien entre l'astronomie et la musique : Harmonie des sphères.

La propagation du son et sa perception

Aristote - De l'âme ($\sim$ -350 av.JC)

Est donc sonore le corps capable de mettre en mouvement une masse d'air, laquelle est une par continuité jusqu'à l'organe de l'ouïe. [...] Et par le fait que cet organe se trouve dans l'air si l'air extérieur est mis en mouvement, l'air intérieur de l'oreille est mû lui aussi. [...]

La propagation du son et sa perception

Aristote - De l'âme (~ -350 Av.JC)

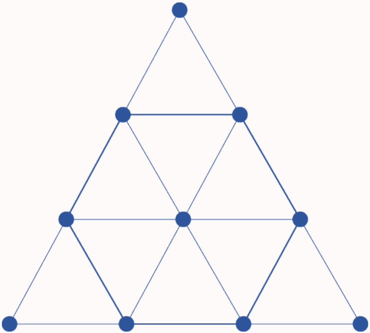
Est donc sonore le corps capable de mettre en mouvement une masse d'air, laquelle est une par continuité jusqu'à l'organe de l'ouïe. [...] Et par le fait que cet organe se trouve dans l'air si l'air extérieur est mis en mouvement, l'air intérieur de l'oreille est mû lui aussi. [...] Quant à l'air qui réside dans les oreilles, il y a été emprisonné pour y être immobile, de façon à percevoir avec exactitude toutes les différences du mouvement.

Figure: L'école d'Athènes - Raphaël (1512)

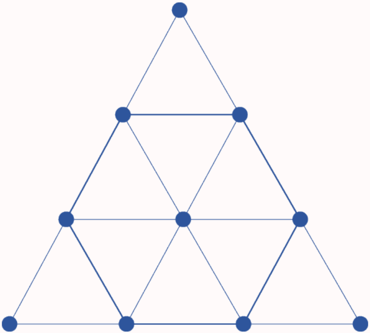
Figure: Platon et Aristote

Figure: Le tetractys

Tretractys

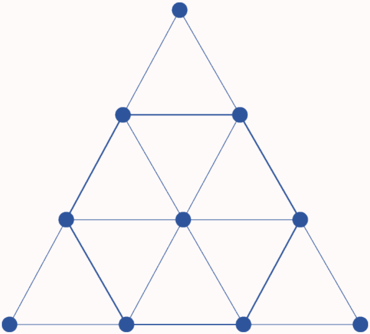


Tretractys



- $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Tretractys



- $1+2+3+4=10$
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

Section 3

Entendre les rapports : Pythagore

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)
- Corde pincée au $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{2}f$ (quinte)

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)
- Corde pincée au $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{2}f$ (quinte)
- Corde pincée au $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{3}f$ (quarte)

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)
- Corde pincée au $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{2}f$ (quinte)
- Corde pincée au $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{3}f$ (quarte)
- Corde pincée au $\frac{4}{5}$: $\frac{5}{4}f$ (tierce majeure)

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)
- Corde pincée au $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{2}f$ (quinte)
- Corde pincée au $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{3}f$ (quarte)
- Corde pincée au $\frac{4}{5}$: $\frac{5}{4}f$ (tierce majeure)
- Corde pincée au $\frac{5}{6}$: $\frac{6}{5}f$ (tierce mineure)

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)
- Corde pincée au $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{2}f$ (quinte)
- Corde pincée au $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{3}f$ (quarte)
- Corde pincée au $\frac{4}{5}$: $\frac{5}{4}f$ (tierce majeure)
- Corde pincée au $\frac{5}{6}$: $\frac{6}{5}f$ (tierce mineure)

Expérience du monocorde

Exemple sur la guitare

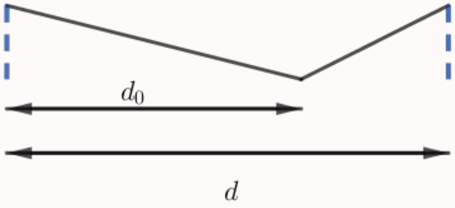
- Corde à vide : son de fréquence f
- Corde pincée à la moitié : $2f$ (octave)
- Corde pincée au $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{2}f$ (quinte)
- Corde pincée au $\frac{3}{4}$: $\frac{4}{3}f$ (quarte)
- Corde pincée au $\frac{4}{5}$: $\frac{5}{4}f$ (tierce majeure)
- Corde pincée au $\frac{5}{6}$: $\frac{6}{5}f$ (tierce mineure)

Remarque (importante) : Le rapport $\frac{\text{Quinte}}{\text{Quarte}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8}$

Propriété

Une corde le longueur d_0 produisant à vide un son de fréquence f_0, produit, lorsqu'elle est pincée à une distance d d'un point d'attache, un son de fréquence f selon la loi :

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{\frac{d}{d_0}}$$



La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte $(\frac{3}{2}f)$

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte ($\frac{3}{2}f$)
- La quinte de la quinte...($\frac{3^2}{2^2}f$)

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte $(\frac{3}{2}f)$
- La quinte de la quinte...$(\frac{3^2}{2^2}f)$
- La quinte de la quinte de la quinte...$(\frac{3^3}{2^3}f)$

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte $(\frac{3}{2}f)$
- La quinte de la quinte...$(\frac{3^2}{2^2}f)$
- La quinte de la quinte de la quinte...$(\frac{3^3}{2^3}f)$
- etc.... $\frac{3^n}{2^n}f$

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte $(\frac{3}{2}f)$
- La quinte de la quinte...$(\frac{3^2}{2^2}f)$
- La quinte de la quinte de la quinte...$(\frac{3^3}{2^3}f)$
- etc....$\frac{3^n}{2^n}f$

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte $(\frac{3}{2}f)$
- La quinte de la quinte...$(\frac{3^2}{2^2}f)$
- La quinte de la quinte de la quinte...$(\frac{3^3}{2^3}f)$
- etc....$\frac{3^n}{2^n}f$

Problème : cette suite augmente très vite en fréquence. Il faudrait pouvoir borner la suite dans un intervalle par exemple $[f, 2f[$)

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte $(\frac{3}{2}f)$
- La quinte de la quinte...$(\frac{3^2}{2^2}f)$
- La quinte de la quinte de la quinte...$(\frac{3^3}{2^3}f)$
- etc.... $\frac{3^n}{2^n}f$

Problème : cette suite augmente très vite en fréquence. Il faudrait pouvoir borner la suite dans un intervalle par exemple $[f, 2f[$)

Solution : diviser par 2 autant de fois qu'il faut puisque c'est la même note à l'oreille.

La construction de la gamme Pythagoricienne est sous-tendue par la construction suivante:

- Note de départ (f)
- La quinte ($\frac{3}{2}f$)
- La quinte de la quinte...($\frac{3^2}{2^2}f$)
- La quinte de la quinte de la quinte...($\frac{3^3}{2^3}f$)
- etc.... $\frac{3^n}{2^n}f$

Problème : cette suite augmente très vite en fréquence. Il faudrait pouvoir borner la suite dans un intervalle par exemple $[f, 2f[$)

Solution : diviser par 2 autant de fois qu'il faut puisque c'est la même note à l'oreille.

$$\boxed{\frac{3^n}{2^p}f}$$

Propriété

Cette construction ne pourra jamais boucler.

Propriété

Cette construction ne pourra jamais boucler.

Sinon il existerait n et p tels que $3^n = 2^p$....

Propriété

Cette construction ne pourra jamais boucler.

Sinon il existerait n et p tels que $3^n = 2^p$....

Solution

Trouver n et p tels que

$$\frac{3^n}{2^p} \simeq 1$$

"à l'oreille"...

Propriété

Cette construction ne pourra jamais boucler.

Sinon il existerait n et p tels que $3^n = 2^p$....

Solution

Trouver n et p tels que

$$\frac{3^n}{2^p} \simeq 1$$

"à l'oreille"... c'est à dire :

$$\boxed{\frac{p}{n} \simeq \frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$$

Fractions continues

Théorème de fractions continues

Pour tout nombre réel x il existe des nombres a_0, a_1, a_3.... tels que :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$$

$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.5849625007211563$ et $\frac{8}{5} = 1.6$

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$$

$\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.5849625007211563$ et $\dfrac{8}{5} = 1.6$

$n = 5$ notes

Fractions continues

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$$

Fractions continues

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$$

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.5849625007211563 \text{ et } \frac{19}{12} \simeq 1.5833333333333333$$

Fractions continues

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$$

$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.5849625007211563$ et $\frac{19}{12} \simeq 1.5833333333333333$

$n = 12$ notes

Fractions continues

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$$

$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.5849625007211563$ et $\frac{19}{12} \simeq 1.5833333333333333$

$n = 12$ notes

Dodécaphonisme.

Python

1
2187/2048
9/8
19683/16384
81/64
177147/131072
729/512
3/2
6561/4096
27/16
59049/32768
243/128

- Valeur du ton Pythagoricien: $\dfrac{9}{8}$

- Valeur du ton Pythagoricien: $\dfrac{9}{8}$
- Tierce Pythagoricienne: $\dfrac{81}{64} \neq \dfrac{5}{4}$

- Valeur du ton Pythagoricien: $\dfrac{9}{8}$
- Tierce Pythagoricienne: $\dfrac{81}{64} \neq \dfrac{5}{4}$
- Le comma syntonique : $\dfrac{\text{tierce Pythagoricienne}}{\text{tierce juste}} = \dfrac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{81}{80}$

- Valeur du ton Pythagoricien: $\frac{9}{8}$
- Tierce Pythagoricienne: $\frac{81}{64} \neq \frac{5}{4}$
- Le comma syntonique : $\frac{\text{tierce Pythagoricienne}}{\text{tierce juste}} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \frac{81}{80}$
- Comma Pythagoricien: $\frac{531441}{524288}$. Quinte du Loup.

- Valeur du ton Pythagoricien: $\dfrac{9}{8}$
- Tierce Pythagoricienne: $\dfrac{81}{64} \neq \dfrac{5}{4}$
- Le comma syntonique : $\dfrac{\text{tierce Pythagoricienne}}{\text{tierce juste}} = \dfrac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{81}{80}$
- Comma Pythagoricien: $\dfrac{531441}{524288}$. Quinte du Loup.
- Le demi-ton

D'autres possibilité à explorer

- Prendre des cycles mixtes de tierces majeures et mineures (rapport $\frac{5}{4}$ et $\frac{6}{5}$) : Gamme de Zarlino

D'autres possibilité à explorer

- Prendre des cycles mixtes de tierces majeures et mineures (rapport $\frac{5}{4}$ et $\frac{6}{5}$) : Gamme de Zarlino
- Tempérament mésotonique : abaisser toutes les tierces d'un comma syntonique : rend juste les tierces

Section 4

Tempérament égal et conséquence

Pour obtenir un tempérament égal il suffit de trouver a tel que $a^{12} = 2$, soit

$$\boxed{a = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} \simeq 1.0594630943592953}$$

Pour obtenir un tempérament égal il suffit de trouver a tel que $a^{12} = 2$, soit

$$\boxed{a = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} \simeq 1.0594630943592953}$$

Problème : ce nombre ne pouvait pas être construit grâce aux instrument de la géométrie (en lien avec le problème de la duplication du cube). Comment construire des instrument de musique respectant cette écart ?

Des approximations de $a = 1.0594630943592953...$

- Boèce (500 ap.JC) :
  $a \simeq \frac{289}{288} = 1,0034...$(*Institutione musica - 510*)

Des approximations de $a = 1.0594630943592953...$

- Boèce (500 ap.JC) : $a \simeq \frac{289}{288} = 1,0034...$(*Institutione musica - 510*)
- Cardan : $a \simeq \frac{18}{17} = 1,0588...$ (*Della Natura de Principii e Regole Musicale - 1546*)

Des approximations de $a = 1.0594630943592953...$

- Boèce (500 ap.JC) :
  $a \simeq \dfrac{289}{288} = 1,0034...$(*Institutione musica - 510*)
- Cardan : $a \simeq \dfrac{18}{17} = 1,0588...$ (*Della Natura de Principii e Regole Musicale - 1546*)
- Marin Mersenne : $a \simeq \sqrt{\sqrt{\dfrac{2}{3-\sqrt{2}}}} = 1.05973...$ (*Harmonie Universelle - 1636)*
  $a^{12} = 2,006...$

Sur une guitare

Sur une guitare

Propriété

La suite des largeurs des cases (ℓ_k) est une suite géométrique.

Preuve : Exercice

- $\dfrac{f}{f_0} = \dfrac{1}{\frac{d}{d_0}}$;

Preuve : Exercice

- $\dfrac{f}{f_0} = \dfrac{1}{\frac{d}{d_0}}$;
- $f_k = a^k f_0$ à la k-ième case ;

Preuve : Exercice

- $\dfrac{f}{f_0} = \dfrac{1}{\frac{d}{d_0}}$;
- $f_k = a^k f_0$ à la k-ième case ;
- Largeur d'une case : $\ell_k = d_k - d_{k+1}$;

Preuve : Exercice

- $\dfrac{f}{f_0} = \dfrac{1}{\frac{d}{d_0}}$;
- $f_k = a^k f_0$ à la k-ième case ;
- Largeur d'une case : $\ell_k = d_k - d_{k+1}$;
- Il vient

$$\boxed{\ell_k = \frac{d_0(1 - \frac{1}{a})}{a^k}}$$


The End