Optimisation dans l'espace

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A\,(0, 6, 0)$, $B\,(0, 0, 8)$, $C\,(10, 0, 8)$. M est un point appartenant au segment $[OB]$. Le plan (Π) passant par M et orthogonal à la droite (OB) coupe la droite (AC) en P.

Partie expérimentale.

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.

Appeler l'examinateur pour la vérification de la construction.

2. On note respectivement N et Q les points d'intersection du plan (Π) avec les droites (OC) et (AB) et l'on admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle. En déplaçant le point M, émettre une conjecture quant à la position de ce point rendant maximale l'aire du rectangle.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie démonstration.

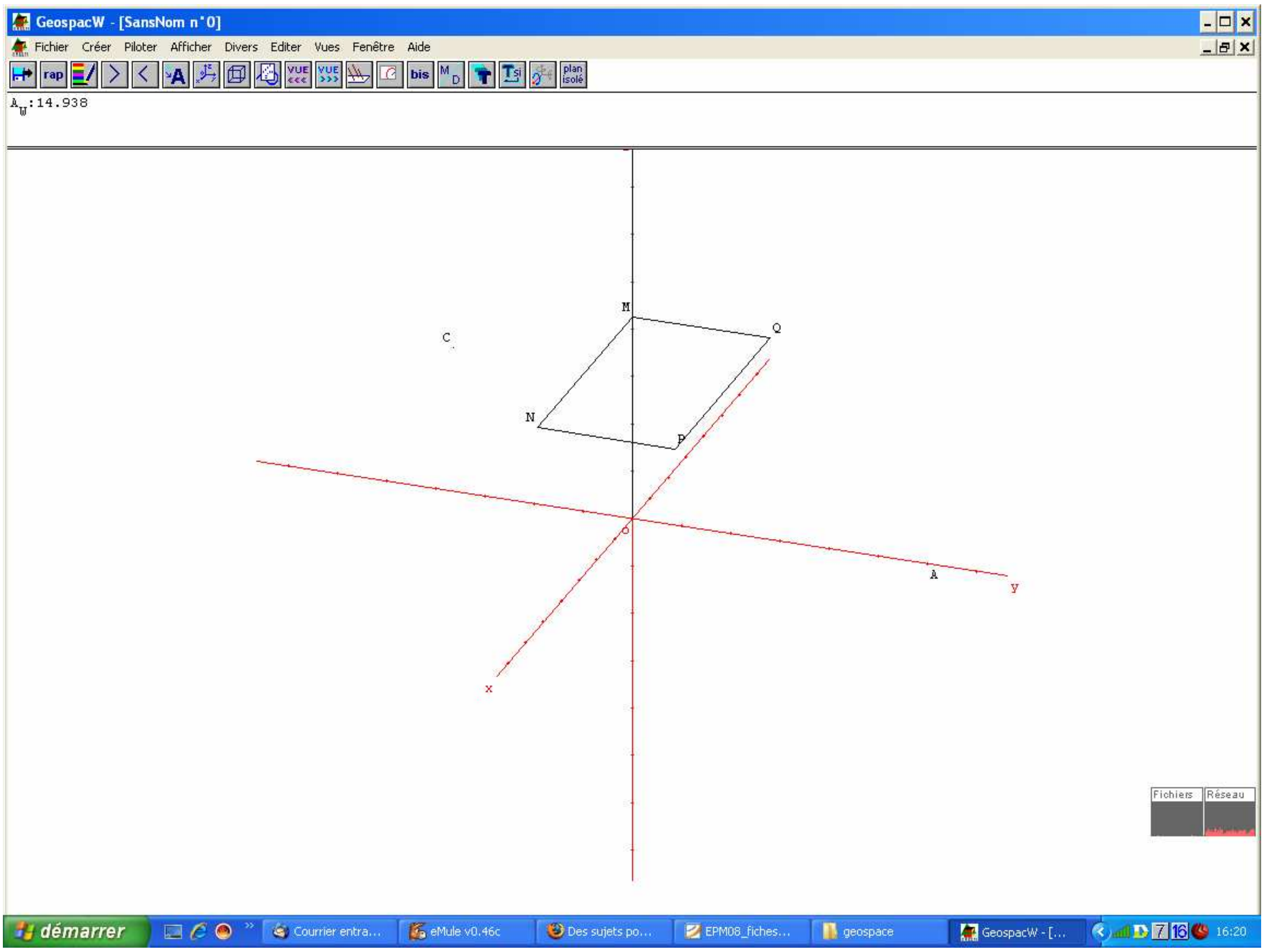
On note $z = OM$.

3. Exprimer en fonction de z les longueurs MN et MQ.
4. Démontrer la conjecture émise en 2.

Production demandée

- La figure réalisée avec le logiciel ;
- Les démonstrations demandées dans les questions 3 et 4.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 029 2008
OPTIMISATION DANS L'ESPACE



Construction avec Géospace :
On place les points A,B,C repérés dans l'espace ; M sur le segment [oB] - attention utiliser o et non O ; on défini le plan – pourquoi l'appeler PI ? ; on termine avec le polygone MNPQ ; on définit son aire qu'on affiche avec 6 décimales.
La conjecture sur la position de M est simple à formuler !

Preuve : assez laborieuse en géométrie analytique . On trouve successivement, par exemple avec la colinéarité de $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{AC}$ que M(0,0,z) ; P($\frac{5}{4}$z, $6-\frac{3}{4}$z,z) et Q(0, $6-\frac{3}{4}$z,z)

En supposant que MNPQ est un rectangle, l'aire MQxPQ vaut ($6-\frac{3}{4}$z) x $\frac{5}{4}$z

Qui sera maximum lorsque z=4

Conclusion : sujet facile pour la partie Tice

12/07/2008 Claude Poulin Nouméa