$6^{ème}$ EXERCICE N° 6 : L'Elu

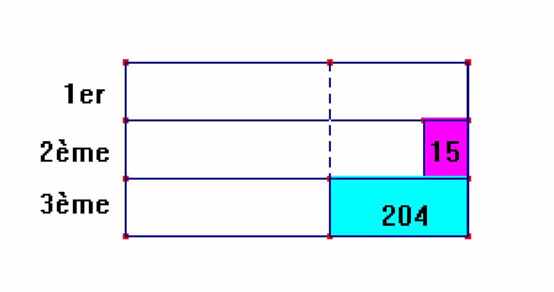
Trois candidats se présentent à une élection. Lors du dépouillement, on a compté 5802 bulletins valables. Le candidat arrivé en tête a 15 voix de plus que le second et 204 voix de plus que le troisième.
Quel est le nombre de voix du candidat arrivé en tête ?

Il s'agit d'un exercice se rapportant aux travaux numériques et qui peut permettre l'introduction de la notion de variable, aux équations, au maniement des tableurs et à la révision des critères de divisibilité.

Solution 1

Pour des élèves de sixième la mise en équation n'est pas acquise et, pour les aider, un schéma est utile.

Sur le schéma, on voit qu'il est intéressant de prendre comme inconnu x le nombre de voix du candidat arrivé troisième.



1^{er} : x + 204 voix
$2^{ème}$: x + (204 – 15) voix
$3^{ème}$: x voix

Et l'on obtient l'équation :

x + 204 + x + 189 + x = 5802 qui donne : 3 x + 393 = 5802 soit 3x = 5802 – 393 = 5409
Donc on a : x = 5409 : 3 = 1803

Le nombre de voix du dernier est 1803 donc le nombre de voix du premier est :

1803 + 204 = $\boxed{2007}$

Cette méthode a l'intérêt de n'utiliser dans l'équation que des additions mais est loin d'être naturelle pour des sixièmes

Solution 2

Si l'on ajoute 204 voix au dernier et 15 voix au second ils auront tous les trois le même nombre de voix et le total augmentera de 204 + 15 = 219 voix Il sera donc de :
5802 + 219 = 6021 Il suffit donc de diviser 6021 par 3 pour avoir leur nombre de voix
6021 : 3 = 2007 donc $\boxed{\text{le gagnant a obtenu 2007 voix}}$

Cette solution intuitive correspond à la mise en équation en prenant, cette fois ci, comme inconnue le nombre de voix du gagnant
Si z est le nombre de voix du gagnant, alors le deuxième a z – 15 voix et le troisième a z – 204 voix

L'équation obtenue est : z + z – 15 + z – 204 = 5802 qui est difficile pour le niveau sixième : mais qui peut intuitivement se transformer en : 3z – 219 = 5802 soit 3z = 6021
et enfin: z = 6021 : 3 = $\boxed{2007}$

Solution 3

Supposons que le premier ait obtenu 1000 voix, le deuxième a : 1000 – 15 = 985 voix , le dernier : 1000-204 = 796
Faisons un tableau :

On remarque :

	premier	deuxième	troisième		total	
	1000	985	796		2781	
+1	1001	986	797		2784	+3
+1	1002	987	798		2787	+3

Et ainsi de suite jusqu'à :

?	?	?		5804

L’important est de remarquer que pour que l’écart de voix reste constant il faut ajouter le même nombre de voix à chaque candidat.

Pour aller de 2781 à 5802 il y a : 5802 – 2781 = 3021 voix et à chaque étape la somme augmente de 3 voix.

Combien d’étapes ? Autant que de fois 3 dans 3021 (à ce stade on peut réviser le critère de divisibilité par 3 et voir si le pb est possible en changeant le total des voix)

3021 : 3 = 1007

Il faut donc 1007 étapes donc 1007 voix de plus à chaque candidat
Le gagnant a donc 1000 + 1007 = 2007 voix

On peut également partir de …

	premier	deuxième	troisième		total	
	204	189	0		393	
+1	205	190	1		396	+3
+1	206	191	2		399	+3

Et utiliser la même démarche

L’idée de réitération d’un processus sur des nombres nous fait penser au tableur
Le programme de collège nous y incite mais,dans les document d’accompagnement du programme intitulé **du numérique au littéral**, il y a un exemple d’utilisation du tableur que je trouve fort inopportun (http://eduscol.education.fr/D0015/du_numerique_au_litteral.pdf)
En effet cet exemple propose d’utiliser un tableur pour résoudre l’équation :

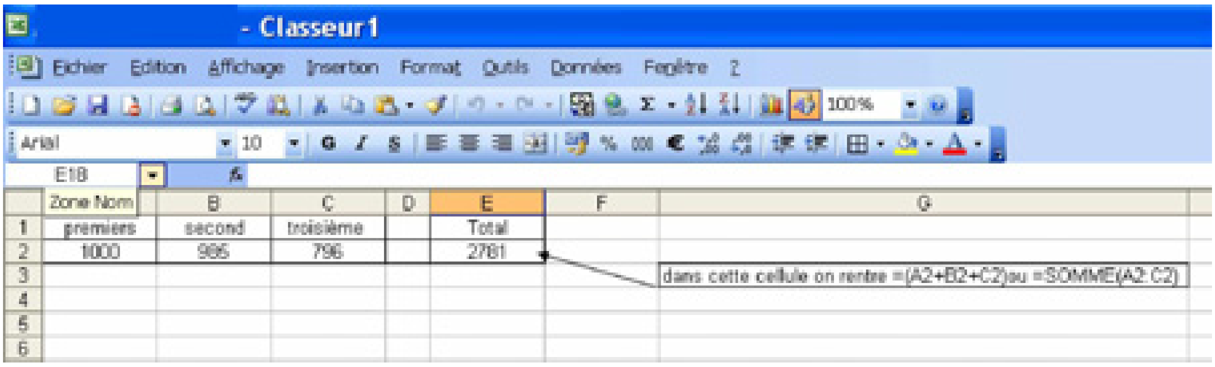
$$26x + 22 = 6x + 149$$

Déjà, on part d’une formulation littérale pour aller vers le numérique (sic)

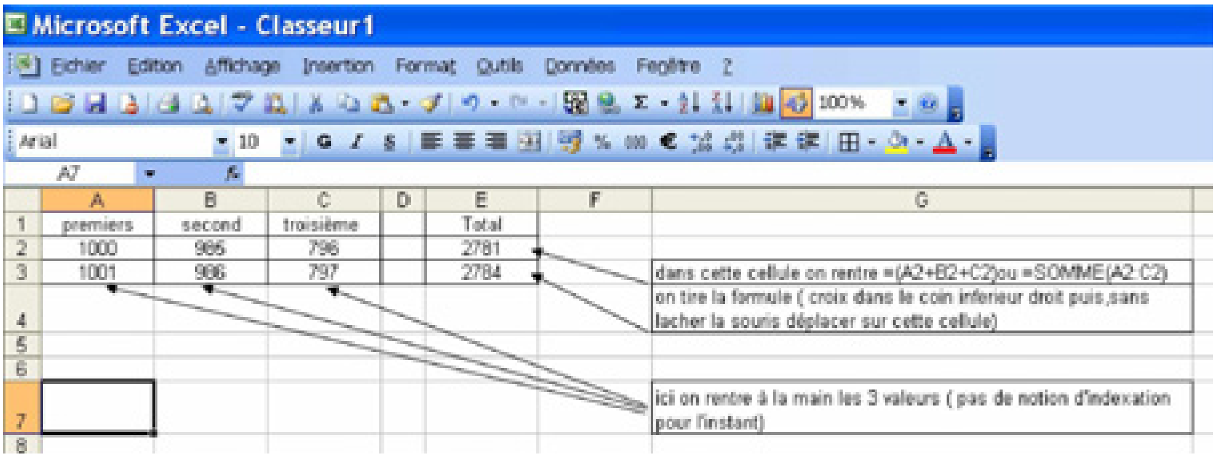
Ensuite on propose d'entrer une valeur dans une cellule(en fait la variable) puis dans deux autres cellules les expressions 26x+22 où x est remplacé par la cellule « variable » et 6x + 169 dans une autre où x est toujours l'adresse de la cellule « variable ». (Cela présuppose l'existence de cette solution, son unicité et des notions de continuité des fonctions)
L'élève qui a pu programmer cela a déjà compris tout des variables, du tableur, et n'a nul besoin de l'outil informatique pour résoudre cette équation d'autant plus que cette résolution se fait par essais successifs et peut être longue <u>ou plus grave ne pas aboutir</u> !!!
En effet changeons seulement dans cette équation 26x par 25 x et tout l'édifice s'effondre.
Le tableur sera incapable de donner la solution de cette équation.

Par contre dans l'exemple inspiré de l'exercice du Rallye on peut progressivement passer du numérique au littéral :

Automatisons la procédure donnée : les copies d'écran sont en Excel (le site officiel de l'éducation ne semble pas avoir de problème à utiliser un logiciel commercial alors faisons de même :



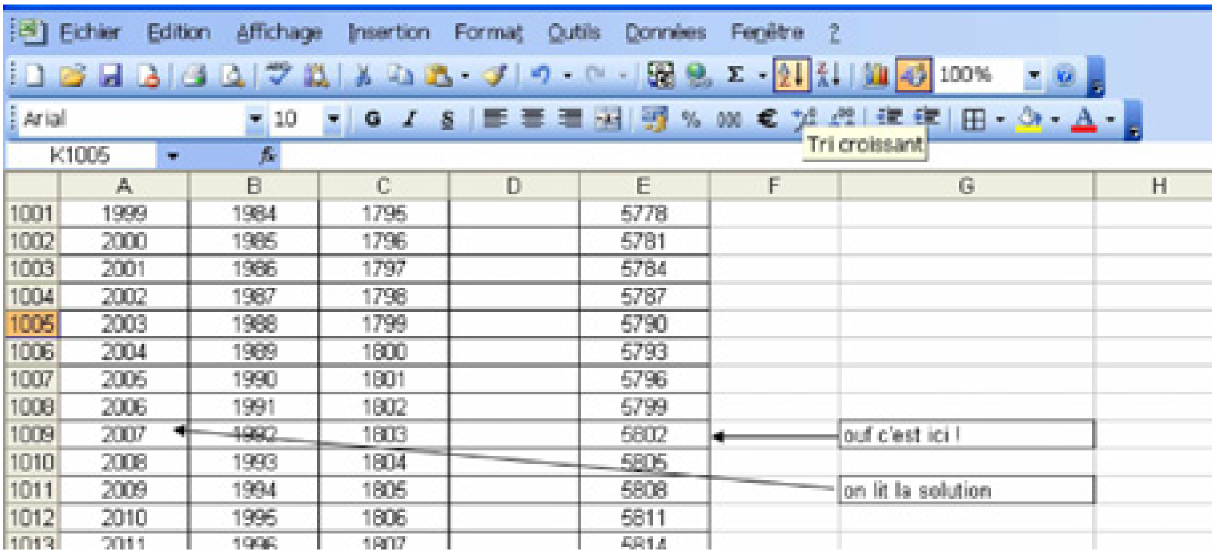
ensuite :



Puis on sélectionne le bloc comprenant les cellules A2 A3 B2 B3 C2 C3 puis dans le coin droit de la sélection on fait apparaître la croix et on tire tout sur un nombre important de lignes.
Excel sait qu'il doit incrémenter chaque cellule d'un par rapport à la cellule supérieure
On sélectionne la cellule total E3 puis de la même façon on tire cette cellule (en fait la formule) sur un grand nombre de lignes.

On obtient alors le tableau de la solution 3.

On observe alors la cellule total et on arrive (enfin) à la valeur 5802 comme ci-dessous :



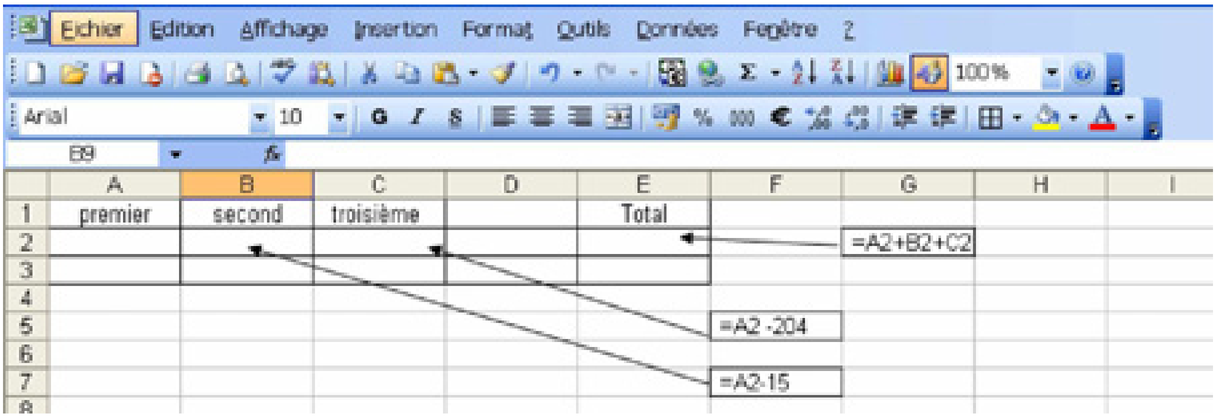
	A	B	C	D	E
1001	1999	1984	1795		5778
1002	2000	1985	1796		5781
1003	2001	1986	1797		5784
1004	2002	1987	1798		5787
1005	2003	1988	1799		5790
1006	2004	1989	1800		5793
1007	2005	1990	1801		5796
1008	2006	1991	1802		5799
1009	2007	1992	1803		5802
1010	2008	1993	1804		5805
1011	2009	1994	1805		5808
1012	2010	1995	1806		5811
1013	2011	1996	1807		5814

C'est laborieux mais pas trop compliqué pour des sixièmes

Il y a bien sûr plus intéressant :

On introduit une valeur numérique dans A2 puis on exprime les autres cellules <u>en fonction de A1.</u> Cela nécessite l'idée de la variable.

A2 sera définie comme A2 – 15 et A3 comme A2 – 204

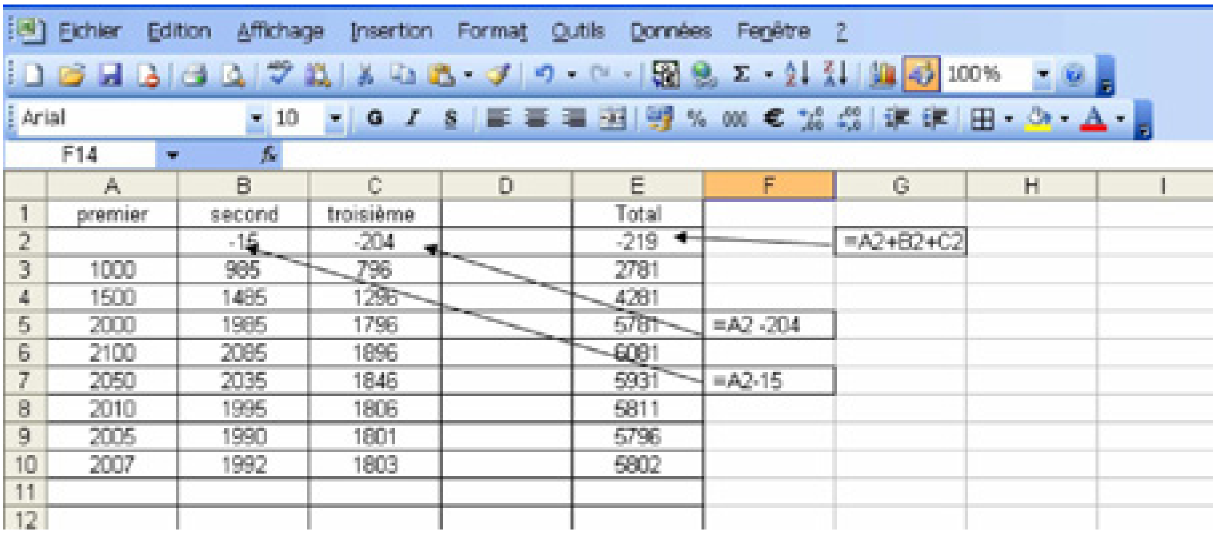


	A	B	C	D	E
1	premier	second	troisième		Total
2					
3					

Puis par essais successifs on constate que pour 2007 en A2 on a bien un total de 5802 voix

Pour garder une trace des essais successifs on peut comme précédemment tirer les formules.
et si l'on remplace A2 par z on retrouve la mise en équation de la solution 2

On obtient un tableau du genre de celui-ci :



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	premier	second	troisième		Total				
2		-15	-204		-219		=A2+B2+C2		
3	1000	985	796		2781				
4	1500	1485	1296		4281				
5	2000	1985	1796		5781	=A2 -204			
6	2100	2085	1896		6081				
7	2050	2035	1846		5931	=A2-15			
8	2010	1995	1806		5811				
9	2005	1990	1801		5796				
10	2007	1992	1803		5802				
11									
12									

Prolongements

1. On peut évoquer pour la dernière manipulation sur le tableur la pertinence d'une stratégie pour arriver plus vite à la solution

2. On peut également refaire l'exercice en compliquant les données ou en faisant de la compréhension de texte :
Voici un énoncé dans lequel j'ai simplement changé et en qui mais qui change tout

Trois candidats se pressentent à une élection. Lors du dépouillement, on a compté 5802 bulletins valables. Le candidat arrivé en tête a 15 voix de plus que le second ***qui*** *a 204 voix de plus que le troisième.*
Quel est le nombre de voix du candidat arrivé en tête ?

Ici la variable adéquate est celle de voix du second candidat et on a x+15 pour le premier, x pour le second et x – 204 pour le dernier
Ce qui donne : x +15 + x + x – 204 = 5804 qui se transforme en 3 x – 189 = 5802 qui donne :
x = 1991 donc 1991 + 15 pour le premier .

$\boxed{\text{Le nombre de voix du premier est donc de 2006 voix}}$

Pour éviter en sixième l'écueil du 15-204 on peut appeler z le nombre de voix du dernier et poser alors :

z + 204 + 15 + z + 204 + z = 5802 qui nous emmène a z = 1787 donc le gagnant a obtenu :

1787 + 204 +15 = $\boxed{\text{2006 voix}}$

Autres pistes : Quelle condition doit satisfaire le nombre total de voix pour que le problème ait une solution ?
Et faire générer par les élèves des énoncés avec 4, 5 candidats On peut alors réviser les critères de divisibilité

Ou encore : *Le premier a eu 15 voix de plus que le second et* ***2 fois plus de voix*** *que le troisième*