# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## Session 2017

---

### MATHÉMATIQUES – Série ES

### ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5**

---

### MATHÉMATIQUES – Série L

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4**

---

# SUJET

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**
**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**
**Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).**

**Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.**

## Exercice 1 (4 points)

*Commun à tous les candidats*

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

**Affirmation 1.**
Pour tout réel $a$ strictement positif, $\ln(a^3) - \ln(a^2) = \ln(a^{25}) - \ln(a^{24})$.

**Affirmation 2.**
Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [0 ; 100], alors $P(X < 75) = P(X > 25)$.

**Affirmation 3.**
On a prélevé un échantillon aléatoire de 400 pièces dans une production et observé 6 pièces défectueuses. La borne supérieure de l'intervalle de confiance de la proportion de pièces défectueuses dans la production au niveau de confiance de 95% est égale à 0,08.

**Affirmation 4.**
L'équation $x \ln(x) = 2 \ln(x)$ admet exactement deux solutions : 2 et 1 sur $]0\,;\,+\infty[$.

## Exercice 2 (5 points)

*Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L*

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.
À l'aller, le bateau est choisi dans 65% des cas.
Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70% des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les événements suivants :

- $A$ : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;
- R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

On rappelle que si $E$ est un événement, $p(E)$ désigne la probabilité de l'événement $E$ et on note $\bar{E}$ l'événement contraire de $E$.

**1.** Traduire cette situation par un arbre pondéré.

**2.** On choisit au hasard un client de l'agence.

**a.** Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.

**b.** Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.

**3.** On choisit au hasard 20 clients de cette agence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.
On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.

**a.** Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

**b.** Déterminer la probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.

**c.** Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.

**4.** Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train. On note $Y$ la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.

**a.** Déterminer la loi de probabilité de $Y$.

**b.** Calculer l'espérance mathématique de $Y$. Interpréter le résultat.

## Exercice 3 (6 points)

*Commun à tous les candidats*

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

**1.** Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375% de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
On note $u_n$ la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année (2013+$n$) avec $u_0 = 4\,000$.

**2.** **a.** Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0{,}99625 u_n + 10{,}2$.

**b.** Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3\,995{,}2$.

**3.** Soit $(d_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $d_n = u_n - 2\,720$ .

**a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $d_{n+1} = 0{,}99625 \times d_n$ .

**b.** Quelle est la nature de la suite $(d_n)$ ? Calculer $d_0$.

**c.** Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $d_n$ en fonction de $n$ ; en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**4.** **a.** Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.

**b.** À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.

## Exercice 4 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

La courbe $(C_1)$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur $[-1\ ;\ 2]$.

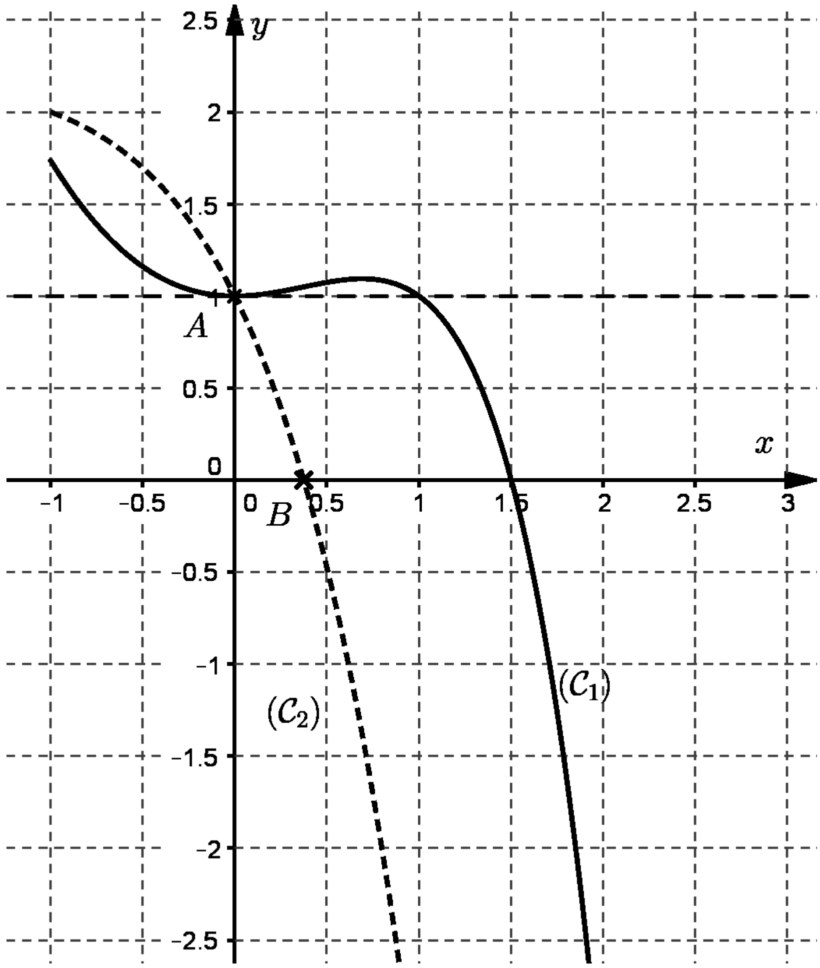
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ et $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$.

La courbe $(C_2)$ ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction $f''$.

Le point A(0 ; 1) est situé sur la courbe $(C_1)$.

Le point B est le point d'intersection de $(C_2)$ avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse de B est 0,37.

La tangente à la courbe $(C_1)$ au point A est horizontale.




**1.** Par lecture graphique,

**a.** Donner la valeur de $f(0)$.

**b.** Donner la valeur de $f'(0)$.

**c.** Étudier la convexité de $f$ sur $[-1\ ;\ 2]$. Justifier la réponse.

**2.** On admet désormais que la fonction $f$ est définie pour tout réel x dans $[-1\,;2]$ par :

$$f(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x} + x^2.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := (1 - x) * \exp(x) + x^2$ <br> $\rightarrow (1 - x)\mathrm{e}^{x} + x^2$ |
| 2 | factoriser(deriver($f(x)$)) <br> $\rightarrow x(2 - \mathrm{e}^{x})$ |
| 3 | primitive($f(x)$) <br> $\rightarrow \dfrac{1}{3}x^3 + (-x + 2)\mathrm{e}^{x}$ |

**a.** Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[-1\,;2]$.

**3.** **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans $[-1\,;\,2]$.

**b.** Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01.

**4.** Déterminer une équation de la tangente à $(C_1)$ au point d'abscisse 1.

**5.** **a.** Justifier la ligne 3 du tableau de calcul formel.

**b.** On admet que la fonction $f$ est positive sur $[-1\,;1]$. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $(C_1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.