DEMONSTRATIONS ET DIFFERENCIATION AUTOUR DE $\sqrt{2}$

Démonstration : $\sqrt{2}$ n'est pas décimal

(Non exigible mais permet de raisonner par l'absurde et par disjonction des cas à deux reprises)

Activité d'accroche :

1) Résoudre, en justifiant la solution, dans $\mathbb{N}$ l'équation $2x - 4 = 2$.
2) Résoudre, en justifiant la solution, dans $\mathbb{N}$ l'équation $2x + 4 = 0$.
3) On souhaite savoir si l'équation $x^2 - 2 = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{D}$.

Rappels (automatismes à vérifier et réactiver) :

• Pour tout réel $a > 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (définition de la racine carrée de a)
• Pour tout réel a et b on a : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (identité remarquable)

a) En utilisant les indications ci-dessus, écrire $x^2 - 2$ sous la forme $(a - b)(a + b)$ (factorisation).
b) L'équation $x^2 - 2 = 0$ admet-elle alors des solutions dans $\mathbb{D}$? Justifier.

• Raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il le soit. Alors il existe $(a, p) \in \mathbb{Z}$ x $\mathbb{N}$/ $\sqrt{2} = \frac{a}{10^p} = a\times 10^p$ avec a non multiple de 10. Par suite, $2\times 10^p = a^2$.

• Raisonnement par disjonction des cas :

* Si $p = 0$, alors $a^2 = 2$, ce qui est impossible puisque $a \in \mathbb{Z}$

* Si $p \neq 0$, alors a^2 est un multiple de 10. Or a ne l'est pas donc son chiffre des unités appartient à $\{1, \ldots, 9\}$.

Le tableau suivant donne le chiffre des unités de a^2.

• Raisonnement par disjonction des cas :

Chiffre des unités de a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2	1	4	9	6	5	6	9	4	9

Comme le chiffre des unités de a^2 n'est pas 10, a^2 n'est pas multiple de 10 ; il y a alors une contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Cette démonstration évite l'écueil de l'association d'un nombre décimal à son écriture décimale et est très intéressante pour la formation mathématique des élèves :
- raisonnement par l'absurde
- raisonnement par disjonction des cas à deux reprises

Démonstration : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

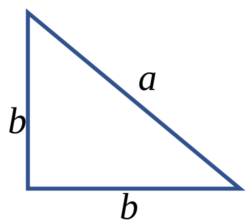
Activité d'accroche :

1) Construction géométrique

a. Construire, avec un maximum de précision, un carré ABCD de côté 12 cm (pas de carreaux).
b. Tracer la diagonale [BD] puis mesurer avec une règle et précision la longueur de cette diagonale en cm.
c. Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier la réponse sans utiliser le théorème de Pythagore.

2) Calculs

Question : Est-il possible de construire un carré où les mesures des côtés et de la diagonale sont des entiers naturels (ou un triangle rectangle et isocèle où les entiers naturels « a » et « b » représentent les mesures respectives de l'hypoténuse et des côtés de l'angle droit comme ci-contre) ?



a. En vous aidant du théorème de pythagore, calculer le rapport $\frac{a}{b}$.
b. Les mesures de la question 1.c vérifient-elles cette égalité ? Comment l'expliquer ?
c. Quelle est la nature du nombre $\frac{a}{b}$?
En déduire alors la condition pour qu'une telle construction soit possible.

Solution :

2) S'il est possible de construire un tel carré (ou triangle), d'après le théorème de Pythagore, on aura : $b^2 + b^2 = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$ soit … $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ car $a > 0$ et $b > 0$.

$\frac{a}{b}$ étant un nombre rationnel (rapport de deux entiers), alors, cette construction n'est possible que si $\sqrt{\mathbf{2}}$ est un nombre rationnel, sinon on dit que $\sqrt{\mathbf{2}}$ est un nombre irrationnel et donc que la construction est impossible.

Conclusion : Pour répondre à la question 2, il suffit d'étudier l'irrationnalité de $\sqrt{\mathbf{2}}$.

1ère méthode : Méthode arithmétique (Raisonnons par l'absurde)

Acquis préalables : définition d'un nombre rationnel ; propriété admise : si pgcd(a,b)=1 alors pgcd(a²,b²) = 1 (justifiable mais pas démontrable en seconde).

On suppose $\sqrt{2}$ rationnel et que son écriture sous forme de fraction irréductible est $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ … $\Longrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Longrightarrow a^2 = 2$ et $b^2 = 1$ car pgcd(a²,b²) = 1 or $a^2 = 2$ est impossible ($a \in \mathbb{Z}$) car 2 n'est pas un carré parfait donc contradiction $\Longrightarrow$ hypothèse fausse donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Conclusion :
Il est impossible de construire un carré où les mesures de la diagonale et des côtés sont des entiers.

2ème méthode : (Raisonnons par l'absurde)

L'objectif du problème est de démontrer que **$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel**. On pourra utiliser le résultat suivant, démontré précédemment : ≪ le carré d'un nombre impair est impair ≫

1. On formule l'hypothèse suivante :
≪ $\sqrt{\mathbf{2}}$ est rationnel et peut donc s'écrire comme le quotient irréductible de deux nombres entiers : $\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ ≫
En déduire qu'alors $2q^2 = p^2$.
2. Justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2n$
3. Déduire des deux questions précédentes que $q^2 = 2n^2$.
4. En déduire que p et q sont pairs. En quoi cela est-il contradictoire avec l'hypothèse formulée dans la question 1 ? Conclure.

Puisque l'hypothèse « $\sqrt{\mathbf{2}}$ est rationnel » conduit à une contradiction (absurdité), c'est donc le contraire qui est vrai, à savoir « $\sqrt{\mathbf{2}}$ est irrationnel ».

3ème méthode : Absurde et disjonction des cas sur le chiffre des unités …

1. On formule l'hypothèse suivante :
≪ $\sqrt{\mathbf{2}}$ est rationnel et peut donc s'écrire comme le quotient irréductible de deux nombres entiers : $\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ ≫
En déduire qu'alors $2q^2 = p^2$ donc que $\frac{p^2}{2q^2} = 1$.
2. Compléter le tableau suivant :

Chiffre de unités de p ou q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre de unités de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Chiffre de unités de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

3. En déduire les chiffres des unités possibles pour p et q pour lesquels $\frac{p^2}{2q^2} = 1$.
Le seul chiffre des unités commun aux deux est 0 ; c'est le cas lorsque le chiffre des unités de p est 0 et celui de q est 0 ou 5
4. Quelle conséquence tirer de p et q ? Il en résulte que p et q sont multiples de 5 ; ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
5. Conclure. L'hypothèse « $\sqrt{\mathbf{2}}$ est rationnel » est fausse ; c'est donc un nombre irrationnel.

4ème méthode : Par fractions (Raisonnons par l'absurde)

Note : $(a-b)$ *est appelé l'expression conjuguée de* $(a+b)$.

1) En multipliant le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur, montrer que $\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$. *Réponse attendue* : $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{2-1}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.

2) On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et que sa forme irréductible est alors $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$; soit que q est le plus petit dénominateur de l'écriture fractionnaire de $\sqrt{2}$.

En remplaçant $\sqrt{2}$ par $\frac{p}{q}$, montrer que $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2q-p}{p-q}$ soit que $\sqrt{2}=\frac{2q-p}{p-q}$.

Réponse attendue : $\sqrt{2}=\frac{(2-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1}=\frac{\frac{2q-p}{q}}{\frac{p-q}{q}}=\frac{2q-p}{p-q}$.

3) En admettant que $1<\sqrt{2}<2$ et sachant que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, montrer que $0<p-q<q$.

Réponse attendue : $1<\sqrt{2}<2 \Leftrightarrow 1<\frac{p}{q}<2 \Leftrightarrow q<p<2q \Leftrightarrow 0<p-q<q$.

4) Que constate-t-on et quelle conclusion en tirer ?

Réponse attendue : le dénominateur $p-q$ de $\sqrt{2}$ encore plus petit que q ; c'est une contradiction avec l'hypothèse de la question 2) « $\sqrt{2}$ rationnel ». ***On conclut que $\sqrt{2}$ est alors irrationnel.***

5ème méthode : Par des inégalités (Raisonnons par l'absurde)

Hypothèse : $\sqrt{2}$ est rationnel donc $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ = fraction irréductible avec a et b entiers et premiers entre eux.

Alors $b\sqrt{2}$ est un entier avec b le plus petit possible (puisque $b\sqrt{2}$).

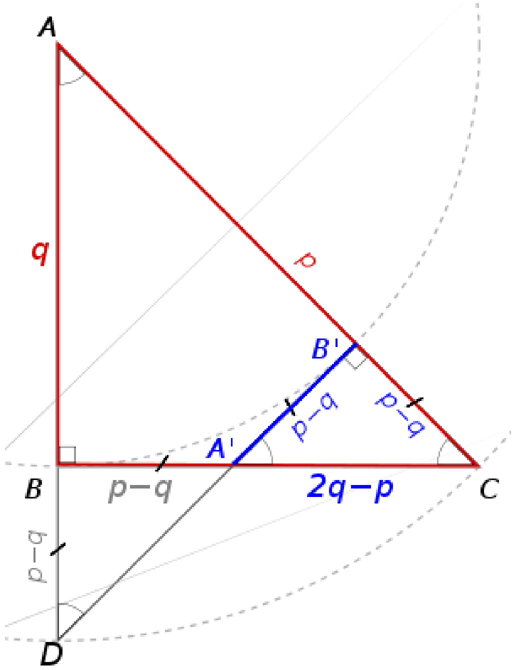
D'autre part, $1<\sqrt{2}<2$ (double inégalité facilement démontrable par l'absurde),

d'où $\sqrt{2}-1<1$ soit, en multipliant par b, $b\sqrt{2}-b<b$; On constate que $c=b\sqrt{2}-b$ est un entier $<b$.

En multipliant par $\sqrt{2}$, on obtient $c\sqrt{2}=2b-b\sqrt{2}<b\sqrt{2}$ or b et $b\sqrt{2}$ sont entiers donc $c\sqrt{2}$ est entier avec $c<b$! ce qui est contradictoire avec l'hypothèse ; on en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

6ème méthode : Géométrique (Raisonnons par l'absurde)

Démonstration géométrique



Si le triangle isocèle rectangle ABC avait ses côtés entiers, le triangle plus petit A'B'C, aussi isocèle rectangle, aurait aussi ses côtés entier (voir ci-dessous) : Alors, $\sqrt{2}$ serait rationnel par descente illimitée ; ce qui est impossible.

La démonstration qui suit est une variante, revisitée, spécifiquement simple de la démonstration géométrique des anciens grecs. Elle apporte presque une évidence géométrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$: étant donné un triangle isocèle rectangle dont les mesures *p* et *q* des côtés sont des entiers, on peut alors construire un triangle isocèle rectangle de dimensions strictement inférieures ayant la même propriété, ce qui montre par descente illimitée qu'un tel triangle ne peut exister.

En effet supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec *p* et *q* entiers c-à-d soit alors un triangle *ABC* rectangle isocèle en *B* de côté *BA* = *BC* = *q*, son hypoténuse est ainsi *AC* = *BA* × $\sqrt{2}$= *p* (figure ci-dessus).

Le cercle de centre *A* et de rayon *AB* intersecte l'hypoténuse [*AC*] en *B'*. Le cercle de centre *A* et de rayon *AC* intersecte le côté [*AB*) en *D*. Le point *A'* est à l'intersection des droites (*BC*) et (*B'D*).

- Les triangles *ABC* et *AB'D*, ayant un angle commun et deux côtés deux à deux de même longueur, sont isométriques. L'angle est par conséquent droit. Comme est un demi-angle droit, *A'B'C* est isocèle rectangle en *B'*. Pour des raisons analogues *A'BD* est isocèle rectangle en *B*.
- Les longueurs des côtés de ces deux triangles, sont entières, en effet :
    - B'C = *AC* - *AB* = *p* - *q*,
    - BD = *AC* - *AB* = *p* - *q*,
    - BA' = *BD* = *p* - *q* (car *A'BD* est isocèle rectangle en *B*).
    - A'C = *BC* - *BA'* = *q* - (*p* - *q*) = 2*q* - *p*.

Le triangle *A'B'C* est rectangle isocèle en *B'* de côté *p* - *q* et d'hypoténuse 2*q* - *p*, l'ensemble des deux entiers. En continuant ainsi, on obtient une descente illimitée de triangles à côtés entiers *ABC*, *A'B'C*, etc. ce qui est absurde. On en déduit que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire $\frac{p}{q}$ avec *p* et *q* entiers.