Nombres complexes et géométrie

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, et peut être ainsi assimilé à l'ensemble des nombres complexes.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit le nombre complexe $z = e^{ia}$. On définit les points M, N et P par leurs affixes respectives z, z^2 et z^3. On définit alors le point Q d'affixe $z + z^2 + z^3$.

Partie A

1. On considère dans cette question que le réel a est fixé. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour contrôle de la transformation choisie et de la figure.

2. Quelle conjecture peut-on formuler sur les points O, N et Q lorsque le réel a varie ?

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure construite.

3. On s'intéresse enfin à l'évolution de la distance OQ lorsque a varie. Que peut-on observer concernant la (ou une) position de M qui donne la distance OQ maximale ? minimale ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les éventuelles observations
   et la méthode prévue pour la démonstration attendue à la question suivante.

Partie B

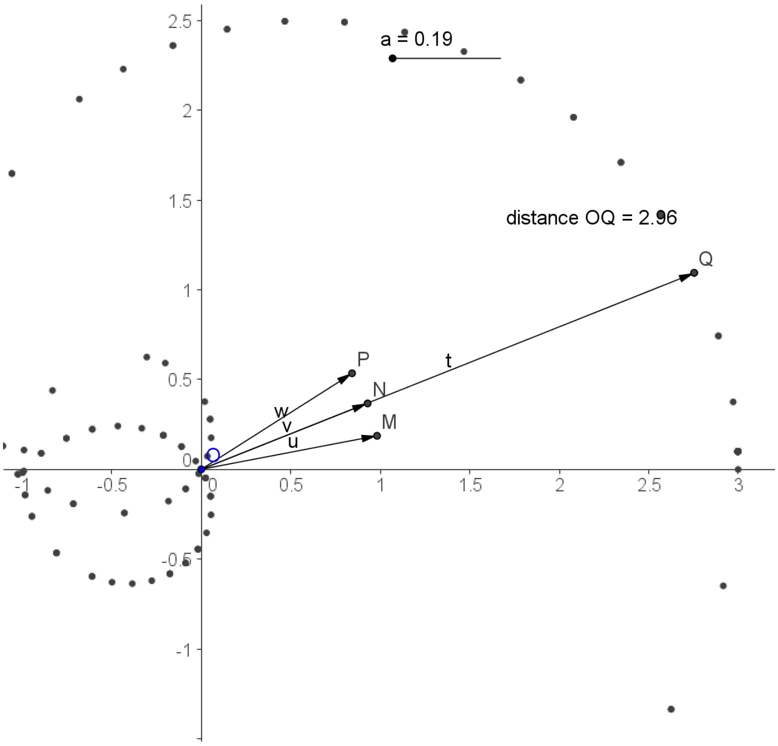
4. Démontrer la conjecture émise en 2).
5. Justifier soit le maximum soit le minimum de OQ.

Production demandée

- Figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- Démonstration de la conjecture.
- Obtention du maximum ou du minimum de la distance OQ.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 051 2009
« Nombres complexes et géométrie»

Logiciel utilisé : Geogebra



La construction est possible en choisissant un curseur sur un argument de z

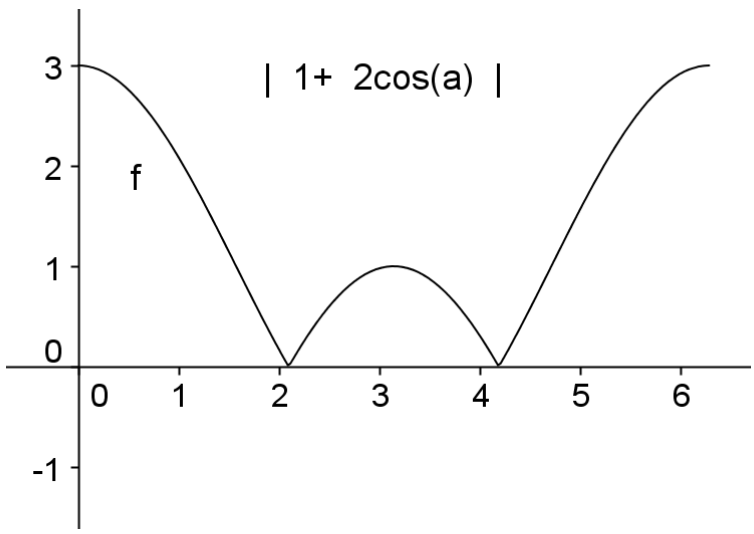
$z_Q = e^{2ia}(e^{-ia} + 1 + e^{ia}) = (2\,\mathrm{Re}(z) + 1)\; e^{2ia} = (2\,\cos(a)\,+1)\,z_N$ O,N et Q sont alignés

et $|z_Q| = |2\,\cos(a)\,+1|$

maximum lorsque a = 0

minimum pour les deux valeurs $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$

d'où les positions correspondantes de M



<u>Conclusion</u> : bon sujet

18/08/2009 Nathalie Mignot - Claude Poulin Nouméa