

∞ Brevet de technicien supérieur novembre 2014 ∞
groupement A Nouvelle-Calédonie

A. P. M. E. P.

Exercice 1

10 points

Soit τ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$. On considère une fonction F définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique de période 2π , impaire telle que :

$$\begin{aligned} F(t) &= 0 & \text{si } t \in \left[0; \frac{\tau}{2}\right[\\ F(t) &= 1 & \text{si } t \in \left[\frac{\tau}{2}; \pi - \frac{\tau}{2}\right[\end{aligned}$$

et

$$F(t) = 0 \quad \text{si } t \in \left[\pi - \frac{\tau}{2}; \pi\right[$$

La fonction F satisfait aux conditions de Dirichlet. On note son développement en série de Fourier, avec les notations du formulaire :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Partie A

Pour cette partie, $\tau = \frac{\pi}{3}$.

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de trois questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie.

1. Parmi quatre courbes représentées sur l'annexe 1, laquelle représente la fonction F ?
2. La valeur du coefficient a_0 est égale à :

- 0 1 $\frac{2}{3}$ π

3. La valeur du coefficient b_1 est égale à :

- 0 1 $\frac{2}{\pi}$ $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$

Partie B

Pour cette partie, $\tau = \frac{\pi}{3}$.

1. On note F_e la valeur efficace de la fonction F . On rappelle que :

$$F_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [F(t)]^2 dt.$$

Montrer que : $F_e^2 = \frac{2}{3}$.

2. Le taux de distorsion harmonique THD du signal modélisé par la fonction F est défini par :

$$THD = 100 \frac{\sqrt{2F_e^2 - b_1^2}}{b_1}.$$

Donner une valeur approchée à une unité près du nombre THD .

Partie C

Pour cette partie τ est quelconque dans l'intervalle $[0 ; \pi[$.

Un onduleur autonome est un convertisseur statique assurant la transformation « continu-alternatif ». La forme de l'onde obtenue par un onduleur autonome à commande décalée est celle définie par $F(t)$ où t est le temps mesuré en secondes.

1. Déterminer a_0 et a_n pour tout nombre entier naturel n non nul. Justifier la réponse.
2. Montrer que

$$\int_0^\pi F(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{n} \left[\cos\left(\frac{n\tau}{2}\right) - \cos\left(n\pi - \frac{n\tau}{2}\right) \right].$$

3. Justifier que pour tout nombre réel τ et tout nombre entier naturel n non nul, on a l'égalité suivante :

$$\cos\left(n\pi - \frac{n\tau}{2}\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{n\tau}{2}\right).$$

4. a. Dédurre des questions 2 et 3 que, pour tout nombre entier naturel n non nul, on a :

$$b_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\tau}{2}\right).$$

- b. En déduire les valeurs de b_2 et b_4 .
- c. Que peut-on dire de b_{2p} pour tout nombre entier naturel p non nul ?
5. La courbe en annexe 2 donne en fonction de τ , le taux de distorsion harmonique (THD) introduit dans la partie B.
Déterminer graphiquement la valeur de τ pour laquelle le taux de distorsion harmonique est minimal.

Exercice 2

10 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une société, spécialiste en équipements et accessoires de bureautique, souhaite commercialiser un nouveau modèle de photocopieur multifonction dont l'une des caractéristiques est la correction de QCM. Dans le but de respecter le plan marketing établi, l'un de ces photocopieurs est installé pour une période d'essai dans le secrétariat pédagogique d'une université.

Les étudiants de cette université ont passé une épreuve de culture générale, sous la forme d'un QCM. Les documents réponses ont été ensuite corrigés par ce photocopieur.

Une étude a été réalisée afin d'évaluer la fréquence des erreurs de correction et le temps nécessaire à cette correction.

Partie A

On prélève au hasard un document réponse de cette épreuve. Tous les documents réponses ont la même probabilité d'être tirés.

Lors de cette étude, 85 % des documents réponses ont été complétés en noir et le reste dans une autre couleur.

La probabilité qu'un document réponse présente au moins une erreur de correction sachant que la couleur utilisée pour y répondre est le noir, est égale à 0,001.

La probabilité qu'un document réponse présente au moins une erreur de correction sachant que

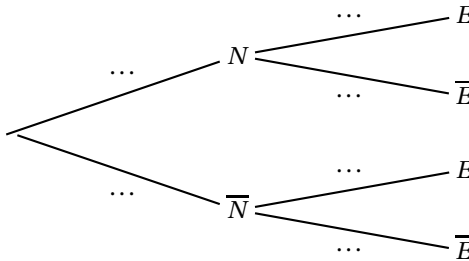
la couleur utilisée pour y répondre n'est pas le noir, est égale à 0,1.

On définit les événements suivants :

E : « Le document, réponse présente au moins une erreur de correction » ;

N : « Le document réponse a été complété en noir ».

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous qui illustre la situation précédente.



2. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes.
- Justifier que $P(N \cap E) = 0,00085$.
 - Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{N} \cap E$.
 - En déduire la probabilité $P(E)$.
3. Quelle est la probabilité, donnée à 10^{-3} près, que le document prélevé soit écrit en noir, sachant qu'il présente au moins une erreur de correction ?

Partie B

On appelle document « mal corrigé » un document réponse présentant au moins une erreur de correction.

La proportion de documents « mal corrigés » est arrondie à 1,6 %.

On prélève au hasard 100 documents réponses. Le nombre de documents réponses est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de documents réponses « mal corrigés » parmi les 100 choisis.

- La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
- Calculer la probabilité $P(X = 0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
- On considère une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,6$ dont la table est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	k	$P(Y = k)$	
2	0	0,201 9	
3	1	0,323 0	
4	2	0,258 4	
5	3	0,137 8	
6	4	0,055 1	
7	5	0,017 6	
8	6	0,004 7	
9	7	0,001 1	
10	8	0,000 2	
11	9	0,000 0	
12	10	0,000 0	
13	11	0,000 0	
14	
15			

À l'aide de la table ou de la calculatrice, déterminer le plus petit nombre entier naturel k' tel que :

$$P(y \leq k') \geq 0,95.$$

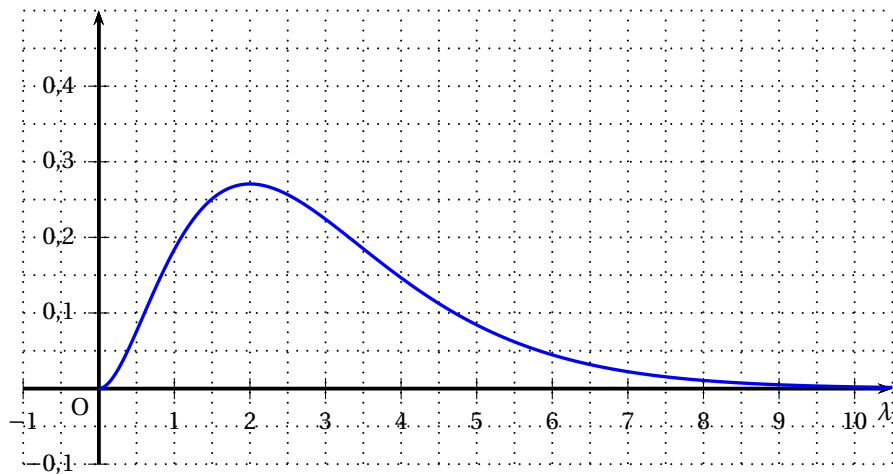
- b.** On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,6$.
Peut-on affirmer que la probabilité qu'au plus 4 documents réponses sur 100 soient « mal corrigés » est supérieure ou égale à 0,95 ?
- 4.** La durée, exprimée en secondes, nécessaire à l'appareil pour corriger 100 documents est une variable aléatoire Z . On admet que la variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 20.
- a.** Déterminer $P(220 \leq Z \leq 280)$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
- b.** Le photocopieur est jugé performant si la probabilité que le temps de correction de 100 documents réponses soit compris entre 220 secondes et 280 secondes est supérieure à 0,8. Ce photocopieur est-il performant ?

Partie C

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de trois questions indépendantes.

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie.

- 1.** Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,016.
Une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geq 1)$ est :
- 0,199 • 0,324 • 0,523 • 0,801
- 2.** Une variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre λ .
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction qui à tout nombre réel strictement positif λ associe la probabilité de l'évènement $Y = 2$.



Sachant que cette probabilité vaut 0,26, une valeur possible, approchée au dixième, de λ est :

- 0,1
- 1,6
- 3
- 3,9

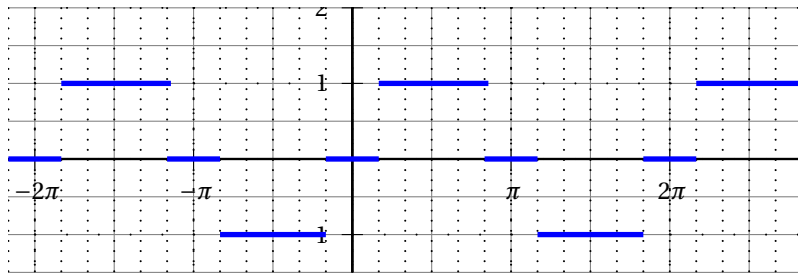
3. Une variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
Une valeur approchée à 10^{-1} près du nombre réel α tel que :

$$P(Z \leq \alpha) = 0,0668$$

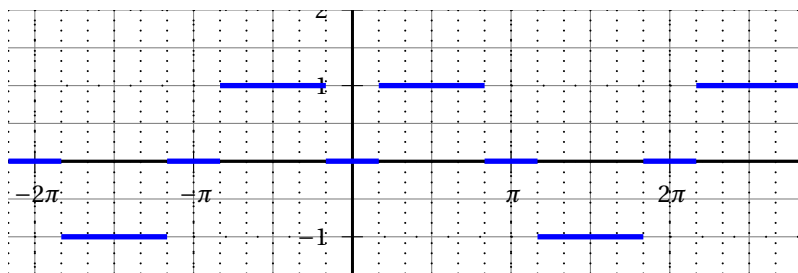
est :

- -1,5
- -0,5
- 0,5
- 1,5

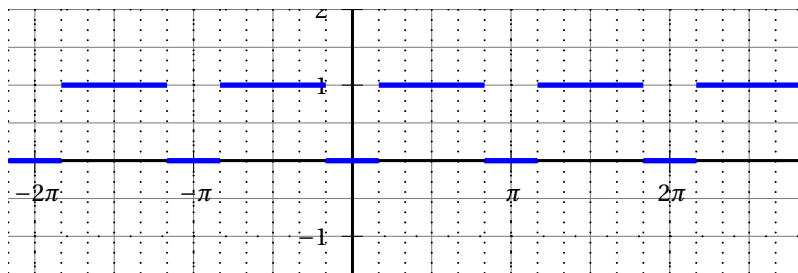
Annexe 1



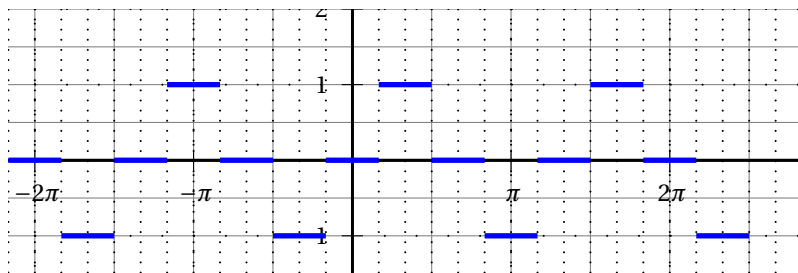
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Annexe 2

