BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2020

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Aucun document n'est autorisé
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet et que toutes les pages sont imprimées.

Ce sujet comporte 7 pages

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat ou la candidate doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat ou la candidate peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

On invite le candidat ou la candidate à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qui aura été développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. On considère le nombre complexe $\mathrm{z} = -2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$. Sa forme exponentielle est :

   a. $\mathrm{z} = -4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ b. $\mathrm{z} = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ c. $\mathrm{z} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ d. $\mathrm{z} = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ est solution de l'équation différentielle :

   a. $2y'' + 3y = 0$ b. $2y'' + 9y = 0$

   c. $y'' + 9y = 0$ d. $y'' + 3y = 0$

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

   a. $y = -2x + 1$ b. $y = x + 1$ c. $y = -2\,x - 1$ d. $y = x - 1$

4. On donne le tableau de variation d'une fonction f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f admet :

   a. deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses et une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées ;
   b. une asymptote parallèle à l'axe des abscisses et une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées ;
   c. une asymptote parallèle à l'axe des abscisses et aucune asymptote parallèle à l'axe des ordonnées ;
   d. aucune asymptote parallèle à l'axe des abscisses et une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées séparément.
Sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une entreprise vient d'installer un distributeur à café dans la salle de repos de ses salariés.

PARTIE A :

On admet que la durée moyenne de fonctionnement d'un distributeur de ce type jusqu'à l'apparition de la première panne est de 15 mois.
Ce distributeur bénéficie d'une garantie de 2 ans.
On modélise la durée de fonctionnement, en mois, de ce distributeur jusqu'à sa première panne par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ.
2. Dans la suite, on prendra $\lambda = 0{,}067$.
   a. Calculer la probabilité que ce distributeur n'ait pas subi de panne au cours des 12 premiers mois.
   b. Calculer la probabilité que ce distributeur subisse sa première panne avant la fin de la garantie.

PARTIE B :

Dans cette partie, les volumes sont exprimés en centilitre (cL).

La notice précise que le distributeur délivre les cafés dans des gobelets d'une contenance de 16 cL. Le volume d'un café distribué par cette machine peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 12{,}5$ et d'écart type $\sigma = 1{,}2$.

1. Déterminer la probabilité que le volume d'un café soit compris entre 11 cL et 14 cL.
2. Déterminer la probabilité que le café déborde du gobelet.

PARTIE C :

Tous les cafés délivrés par ce distributeur ont une température initiale de 80 °C.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température des cafés servis.
On note $\theta(t)$ la température d'un café en degré Celsius, à l'instant t exprimé en minute.
On admet que la fonction θ, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est solution de l'équation différentielle :

$$\theta'(t) + 0{,}2\theta(t) = 4$$

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle.
2. Montrer que, pour tout réel t positif : $\theta(t) = 60\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 20$.
3. Un salarié se sert un café et attend 4 minutes avant de le boire.
   a. Quelle est alors la température de son café ? On arrondit le résultat à l'unité.
   b. Déterminer la valeur exacte de la durée d'attente nécessaire pour que la température du café atteigne 40 °C, puis en donner une valeur approchée arrondie à la minute.

EXERCICE 3 (5 points)

La loutre d'Europe est un mammifère carnivore de la famille des mustélidés.

Sa population n'a cessé de décroître en France en raison de la dégradation de son milieu naturel, mais également parce que cette espèce est victime de pièges posés par les chasseurs.

PARTIE A :

La population de loutres d'Europe était en France de $50\,000$ individus au 1er janvier 1930. On estime que depuis cette date, la population a perdu $5\ \%$ de ses individus chaque année en raison de la dégradation du milieu naturel.

1. Calculer la population de loutres d'Europe en France au 1er janvier 1931.

On fait l'hypothèse qu'en plus de la chute démographique due à la dégradation du milieu naturel, 68 individus sont piégés tous les ans entre le 1er janvier et le 31 décembre.

On modélise la population de loutres d'Europe en France par la suite (u_n) définie par

$u_0 = 50\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n - 68$

L'arrondi à l'unité de u_n est alors égal au nombre de loutres de la population le 1er janvier de l'année $1930 + n$.

2. Calculer u_1 et u_2. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. L'algorithme ci-dessous permet d'estimer l'année à partir de laquelle la population de loutres d'Europe en France comptera moins de $1\,000$ individus.

```
N ← 1930
U ← 50 000
Tant que ……………
    N ← N+1
    U ← ……………
Fin Tant que
```

   Recopier et compléter cet algorithme.

4. On estime que l'espèce est en danger d'extinction si elle comporte moins de $1\,000$ individus. Justifier le fait qu'un plan de réintroduction de la loutre d'Europe ait été mis en place en France à partir de l'année 1991.

PARTIE B :

À partir de 1991, la population de loutres d'Europe perd toujours 5 % de ses individus chaque année, mais le plan de sauvegarde prévoit :

- l'interdiction de la pose de pièges ;
- la réintroduction de 250 jeunes loutres au 31 décembre de chaque année.

On suppose que la population au 1er janvier 1991 s'élève à $1\ 000$ loutres.

On modélise la population à partir du 1er janvier 1991 par la suite (v_n) définie par $v_0 = 1\ 000$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}95\ v_n + 250$.

L'arrondi à l'unité de v_n représente le nombre de loutres au premier janvier de l'année $1991 + n$.

1. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 5\ 000$.

   Justifier que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0{,}95$. Préciser son terme initial w_0.

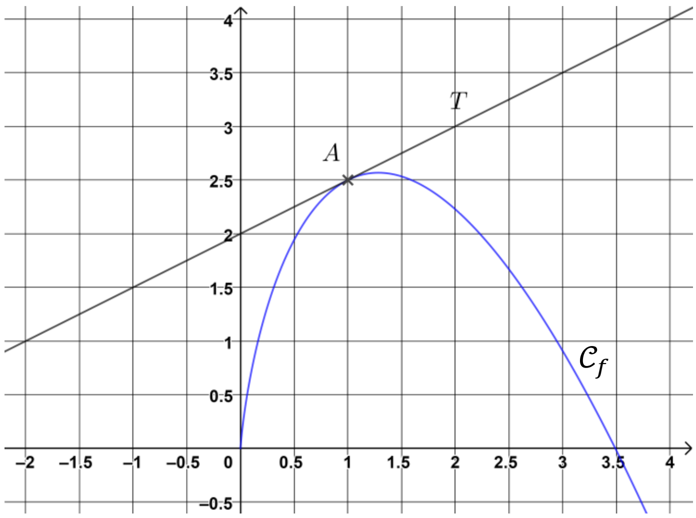
2. Exprimer alors w_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 5\ 000 - 4\ 000 \times 0{,}95^n$.
4. Dans l'hypothèse où l'on conserve la même évolution tous les ans, la population de loutres d'Europe en France peut-elle à long terme retrouver l'effectif de 1930 ? Justifier.

EXERCICE 4 (6 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées séparément.

Sur le graphique ci-contre, $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = a\,x + b\,x\ln(x)$, où a et b sont deux réels.



La droite T est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

PARTIE A :

1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$
   $f'(x) = a + b + b\ln(x)$.

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de a et b.

PARTIE B :

On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

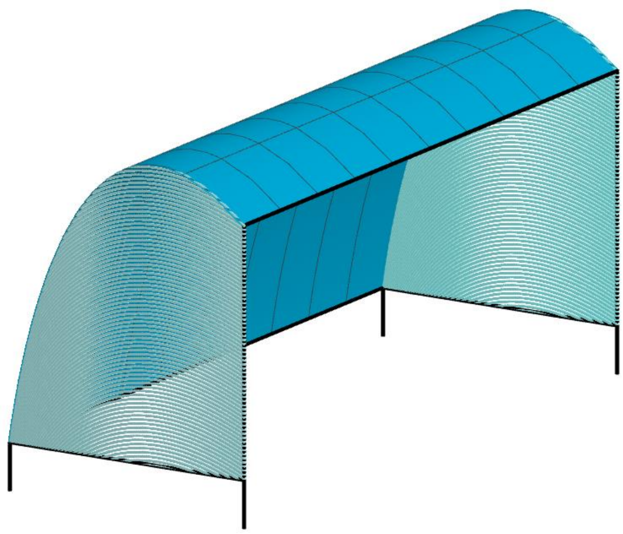
$f(x) = 2{,}5x - 2x\ln(x)$

1. Donner l'expression de $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f. (Les limites aux bornes ne sont pas demandées).

PARTIE C :

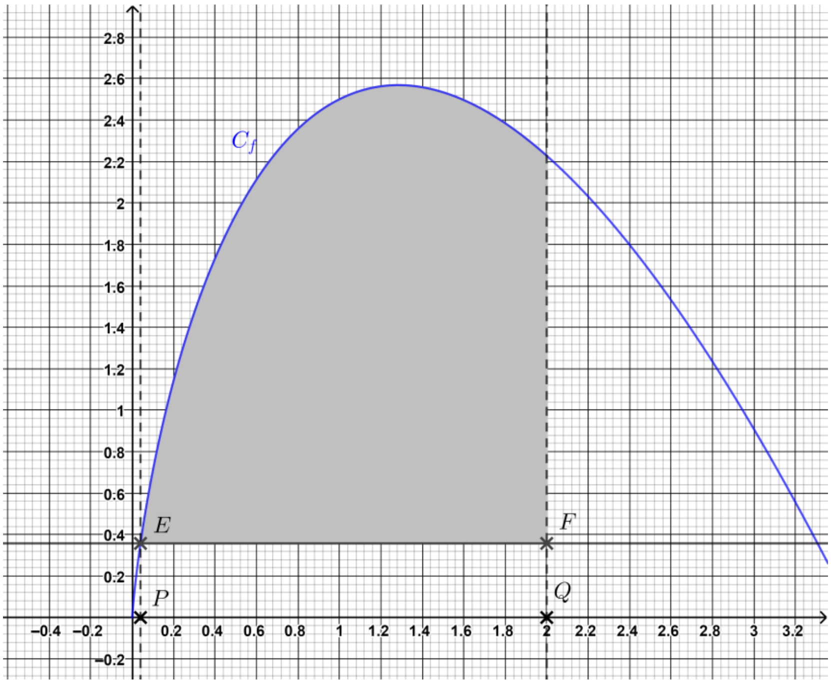
On souhaite installer des abris à vélos couverts.

Pour les fabriquer, on a besoin de connaître l'aire des faces latérales.



Soit E le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $0{,}04$ et F le point d'abscisse 2 ayant même ordonnée que E.

Une face latérale est représentée par le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équation $x = 0{,}04$ et $x = 2$ et la droite (EF) parallèle à l'axe des abscisses (voir figure ci-dessous).



1. Montrer que la fonction G définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$G(x) = x^2\,(1{,}75 - \ln(x))$$

   est une primitive de f sur $]0\,;+\infty\,[$

2. On souhaite calculer $\int_{0,04}^{2} f(x)\,dx$.

   a. Parmi les quatre propositions suivantes, recopier sur la copie celle qui permet de calculer cette intégrale :

$f(2) - f(0{,}04)$	$G(2) - G(0{,}04)$	$f(0{,}04) - f(2)$	$G(0{,}04) - G(2)$

   b. Donner une valeur approchée de $\int_{0,04}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ à 10^{-1} près.

3. Toutes les dimensions sont exprimées en mètre. En déduire une valeur approchée, à $0{,}1\ \mathrm{m}^2$ près, de l'aire d'une face latérale.