B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8,
dont l'annexe 1 et l'annexe 2 page 8/8 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité)

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question son numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}9x^3 + 1{,}5x^2 + 1{,}5$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $y = 2$ est :
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

2. Une des solutions de l'inéquation $1 - 0{,}85^n > 0{,}99$ d'inconnue n entier naturel est :
   a) 28 b) 29 c) $\frac{\ln 0{,}85}{\ln 0{,}01}$ d) 28,336

3. Esteban va à l'école chaque matin avec une trousse. À la fin de la journée, il oublie sa trousse avec une probabilité de 0,2. Dans l'année, le nombre de jours d'école est de 162.
   On considère que les oublis journaliers sont indépendants les uns des autres. La probabilité qu'il oublie sa trousse 30 fois exactement dans l'année est environ :
   a) $0{,}19$ b) $0{,}07$ c) $0{,}60$ d) $0{,}36$

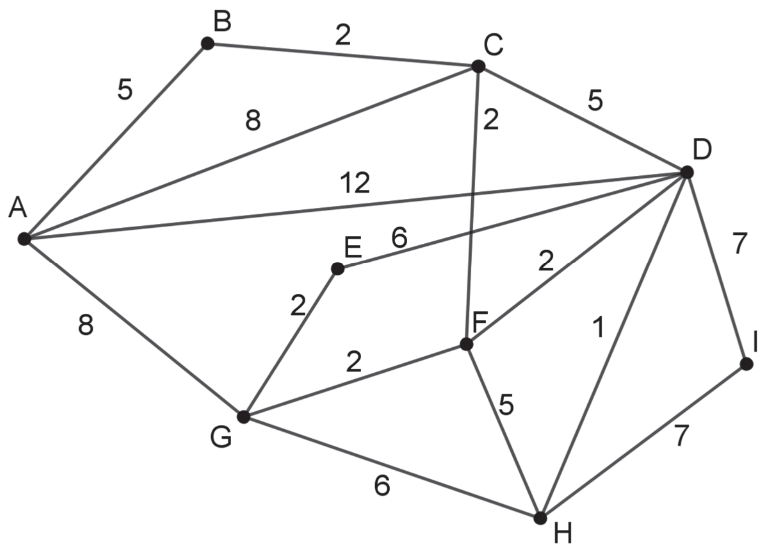
4. Une enquête a pour objectif d'estimer la proportion de personnes partant en vacances à l'étranger durant la semaine de Noël. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude $0{,}001$ au niveau de confiance $0{,}95$ de cette proportion, la taille de l'échantillon doit être égale à :
   a) $4\,000\,000$ b) $1\,000$ c) $2\,000$ d) $1\,000\,000$

Exercice 2 (5 points)
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Sur son lieu de vacances d'été, Inaé décide de pratiquer son activité favorite : le vélo tout terrain (VTT). Le plan des sentiers VTT de la région est représenté par le graphe ci-dessous.
Les arêtes représentent les sentiers, les sommets représentent les intersections de ces sentiers et le poids des arêtes désigne la distance en km entre chaque intersection.



1. Pourra-t-elle explorer tous les sentiers en ne passant qu'une fois sur chacun d'entre eux ? Justifier.
2. Inaé se trouve en A et a rendez-vous au point I. Elle veut s'y rendre en empruntant l'itinéraire le plus court. Déterminer à l'aide d'un algorithme cet itinéraire et en préciser la longueur.

Partie B

En 2018, des vélos électriques ont été mis en location. Les clients ont donc eu le choix entre des vélos classiques et des vélos électriques. En 2018, seulement 10 % des clients ont loué des vélos électriques.
On admet que tous les clients louent un vélo et que :

- 85 % des clients ayant loué un vélo électrique une année en relouent un l'année suivante ;
- 70 % des clients ayant loué un vélo classique en relouent un l'année suivante.

On suppose que le nombre de clients chaque été reste constant. On s'intéresse à la répartition des clients dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse un vélo classique l'année $2018 + n$;
- e_n la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse un vélo électrique l'année $2018 + n$;
- $P_n = (c_n \ \ e_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste l'année $2018 + n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
   On notera C l'événement « le client loue un vélo classique » et E l'événement « le client loue un vélo électrique ».
2. Donner la matrice P_0 traduisant l'état probabiliste initial ainsi que la matrice de transition M en respectant l'ordre C puis E des sommets.
3. Calculer P_1.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Lors d'un safari photo en Afrique, un groupe de touristes souhaite observer des familles d'éléphants. Le guide leur explique que :

- la probabilité de voir des éléphants adultes dans la journée est de $0{,}85$;
- la probabilité de voir des bébés éléphants sachant que l'on voit des éléphants adultes est de $0{,}5$;
- la probabilité d'observer des bébés éléphants mais pas d'adultes éléphants dans la journée est de $0{,}015$.

On choisit au hasard un touriste de ce groupe et on considère les événements suivants :

A : « Le touriste voit des éléphants adultes dans la journée » ;
B : « Le touriste voit des bébés éléphants dans la journée ».

Pour tous événements E et F, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E, $p(E)$ la probabilité de E et, si F est de probabilité non nulle, $p_F(E)$ la probabilité de E sachant F.

1. Donner $p(\bar{A} \cap B)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
3. Montrer que $p(B) = 0{,}44$.
4. a) Calculer $p_{\bar{A}}(B)$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

À 20 h, le groupe de touristes fait une pause autour d'un point d'eau pour observer le bain des éléphants. On considère que le temps d'attente en minute nécessaire pour observer des éléphants suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;90]$.

1. Quelle est la probabilité que le groupe attende plus d'une heure avant d'apercevoir les éléphants ?
2. Calculer l'heure moyenne d'arrivée des éléphants.

Partie C

Lors de leur séjour, les touristes ont appris que les éléphants d'Afrique sont généralement plus grands que les éléphants d'Asie.
On modélise la taille en centimètre d'un éléphant d'Afrique par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. De même, on modélise la taille en centimètre d'un éléphant d'Asie par une variable aléatoire Y suivant la loi normale de moyenne μ' et d'écart type σ'.
Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des densités de probabilité associées à X et Y sont données en **annexe 1**.

1. a) Associer chaque courbe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ à sa variable aléatoire.
   b) Donner une valeur approchée à la dizaine de l'espérance pour chacune d'entre elle.
2. Représenter graphiquement $p(X > 330)$ et $p(Y > 330)$ puis comparer ces deux probabilités.
3. a) Calculer à l'aide de la calculatrice $p(Y > 330)$ sachant que $\mu' = 268$ et $\sigma' = 50$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2 + 5)\mathrm{e}^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée **en annexe 2**.

1. a) Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère fourni en **annexe 2**.
   b) Démontrer que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer leurs coordonnées et les placer dans le repère fourni en **annexe 2.**
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-5x^2 - 10x + 5)\mathrm{e}^x$.
   d) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

2. Soit Δ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   a) Montrer qu'une équation de Δ est $y = 5x + 5$.
   b) Tracer la droite Δ dans le repère fourni en **annexe 2.**

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants que l'on pourra utiliser sans justification :

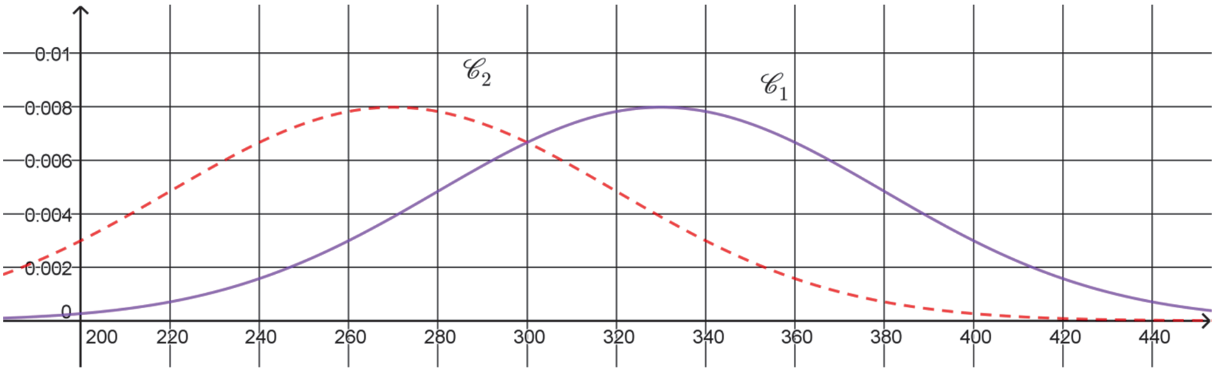
1	f(x) → $\left(-5\,x^2 + 5\right)\,\mathrm{e}^x$
2	f''(x) → $-20\,x\,\mathrm{e}^x - 5\,x^2\,\mathrm{e}^x - 5\,\mathrm{e}^x$
3	Résoudre(f''(x)=0,x) → $\left\{x = -\sqrt{3} - 2, x = \sqrt{3} - 2\right\}$

   a) Montrer que, pour tout $x \in [-5\,;2]$, $f''(x) = -(5x^2 + 20x + 5)\mathrm{e}^x$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

4. On s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   a) Hachurer sur **l'annexe 2** ce domaine.
   b) On admet que sur l'intervalle $[-1\,;0]$, la droite Δ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$.
   Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ est inférieure à 2,5 unités d'aire.
   c) On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$F(x) = (-5x^2 + 10x - 5)\mathrm{e}^{\,x}$$
   est une primitive de f.
   Calculer $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Annexes à rendre avec la copie

Annexe 1
Exercice 3



Annexe 2
Exercice 4