B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **4**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7**,**
dont l'annexe 1 et l'annexe 2 page 7/7 sont à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question son numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}9x^3 + 1{,}5x^2 + 1{,}5$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $y = 2$ est :
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

2. Une des solutions de l'inéquation $1 - 0{,}85^n > 0{,}99$ d'inconnue n entier naturel est :
   a) 28 b) 29 c) $\frac{\ln 0{,}85}{\ln 0{,}01}$ d) 28,336

3. Esteban va à l'école chaque matin avec une trousse. À la fin de la journée, il oublie sa trousse avec une probabilité de 0,2. Dans l'année, le nombre de jours d'école est de 162.
   On considère que les oublis journaliers sont indépendants les uns des autres. La probabilité qu'il oublie sa trousse 30 fois exactement dans l'année est environ :
   a) $0{,}19$ b) $0{,}07$ c) $0{,}60$ d) $0{,}36$

4. Une enquête a pour objectif d'estimer la proportion de personnes partant en vacances à l'étranger durant la semaine de Noël. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude $0{,}001$ au niveau de confiance $0{,}95$ de cette proportion, la taille de l'échantillon doit être égale à :
   a) $4\,000\,000$ b) $1\,000$ c) $2\,000$ d) $1\,000\,000$

Exercice 2 (5 points)
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité.

Partie A

La responsable d'un aquarium public constate qu'en l'absence d'action particulière, la population d'une espèce de poisson augmente de $20\ \%$ par an.
Pour démarrer un nouveau bassin, elle a acheté 150 poissons de cette espèce le 1er janvier 2018.
Pour réguler cette population, elle décide de prélever 28 poissons à la fin de chaque année.
La situation est modélisée par une suite (u_n) de terme initial $u_0 = 150$, le terme u_n donnant une estimation du nombre de poissons au 1er janvier de l'année $2018 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 28$.
3. On définit la suite (w_n) par : $w_n = u_n - 140$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $1{,}2$.
   Préciser son terme initial.
   b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de n.
   En déduire u_n en fonction de n.
4. Sachant que l'aquarium ne peut contenir plus de 200 poissons, la responsable doit-elle prévoir l'achat d'un autre aquarium dans les années à venir ? Si oui, en quelle année ?

Partie B

On sait qu'il y a eu 1350 visiteurs le premier mois et que le prix d'entrée est fixé à 8 euros. La responsable fait l'hypothèse d'une augmentation mensuelle de la fréquentation des visiteurs de 12 %. Elle veut alors savoir, sous cette hypothèse, la recette totale accumulée durant les six premiers mois.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine la recette cherchée.

```
S ← 0
V ← 1350
Pour N allant de 1 à …
        S ← ⋯
        V ← 1,12 V
Fin Pour
S ← 8S
```

2. Quel est le montant de la recette cherchée ?

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Lors d'un safari photo en Afrique, un groupe de touristes souhaite observer des familles d'éléphants. Le guide leur explique que :

- la probabilité de voir des éléphants adultes dans la journée est de $0,85$;
- la probabilité de voir des bébés éléphants sachant que l'on voit des éléphants adultes est de $0,5$;
- la probabilité d'observer des bébés éléphants mais pas d'adultes éléphants dans la journée est de $0,015$.

On choisit au hasard un touriste de ce groupe et on considère les événements suivants :

A : « Le touriste voit des éléphants adultes dans la journée » ;
B : « Le touriste voit des bébés éléphants dans la journée ».

Pour tous événements E et F, on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E, $p(E)$ la probabilité de E et, si F est de probabilité non nulle, $p_F(E)$ la probabilité de E sachant F.

1. Donner $p(\bar{A} \cap B)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
3. Montrer que $p(B) = 0,44$.
4. a) Calculer $p_{\bar{A}}(B)$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

À 20 h, le groupe de touristes fait une pause autour d'un point d'eau pour observer le bain des éléphants. On considère que le temps d'attente en minute nécessaire pour observer des éléphants suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 90]$.

1. Quelle est la probabilité que le groupe attende plus d'une heure avant d'apercevoir les éléphants ?
2. Calculer l'heure moyenne d'arrivée des éléphants.

Partie C

Lors de leur séjour, les touristes ont appris que les éléphants d'Afrique sont généralement plus grands que les éléphants d'Asie.
On modélise la taille en centimètre d'un éléphant d'Afrique par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. De même, on modélise la taille en centimètre d'un éléphant d'Asie par une variable aléatoire Y suivant la loi normale de moyenne μ' et d'écart type σ'.
Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des densités de probabilité associées à X et Y sont données en **annexe 1**.

1. a) Associer chaque courbe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ à sa variable aléatoire.
   b) Donner une valeur approchée à la dizaine de l'espérance pour chacune d'entre elle.
2. Représenter graphiquement $p(X > 330)$ et $p(Y > 330)$ puis comparer ces deux probabilités.
3. a) Calculer à l'aide de la calculatrice $p(Y > 330)$ sachant que $\mu' = 268$ et $\sigma' = 50$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2 + 5)\mathrm{e}^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f, et f'' la fonction dérivée seconde. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée **en annexe 2**.

1. a) Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère fourni en **annexe 2**.
   b) Démontrer que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Déterminer leurs coordonnées et les placer dans le repère fourni en **annexe 2.**
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-5x^2 - 10x + 5)\mathrm{e}^x$.
   d) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

2. Soit Δ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   a) Montrer qu'une équation de Δ est $y = 5x + 5$.
   b) Tracer la droite Δ dans le repère fourni en **annexe 2.**

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants que l'on pourra utiliser sans justification :

1	f(x) $\rightarrow\ \left(-5\ x^2 + 5\right)\ e^x$
2	f''(x) $\rightarrow\ -20\ x\ e^x - 5\ x^2\ e^x - 5\ e^x$
3	Résoudre(f''(x)=0,x) $\rightarrow\ \left\{x = -\sqrt{3} - 2, x = \sqrt{3} - 2\right\}$

   a) Montrer que, pour tout $x \in [-5\,;2]$, $f''(x) = -(5x^2 + 20x + 5)\mathrm{e}^x$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;2]$.

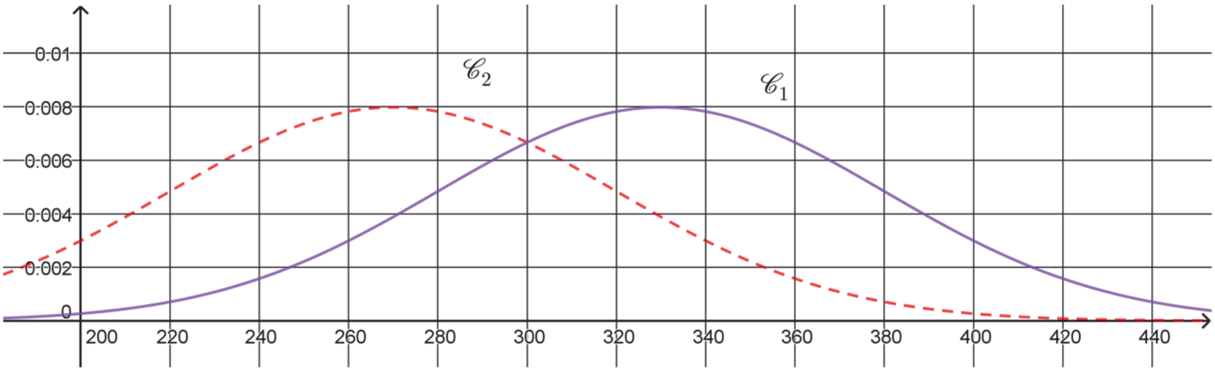
4. On s'intéresse à l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   a) Hachurer sur **l'annexe 2** ce domaine.
   b) On admet que sur l'intervalle $[-1\,;0]$, la droite Δ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$.
   Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ est inférieure à 2,5 unités d'aire.
   c) On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$F(x) = (-5x^2 + 10x - 5)\mathrm{e}^{\,x}$$

   est une primitive de f.
   Calculer $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Annexes à rendre avec la copie

Annexe 1
Exercice 3



Annexe 2
Exercice 4