Angles et mesures des angles

Cyrille GUIEU, lycée Antoine Kela

1 Angles

Le plan est considéré comme un espace affine euclidien de dimension 2 orienté. Les droites sont les sous-espace affines de dimension 1. La distance est celle induite par la norme euclidienne.
On note $\mathcal{I}$ le groupe des isométries affines du plan et $\mathcal{I}^+$ celui des isométries affines directes.

Etant données deux parties du plan M et N, on notera $M \equiv N$ la relation : "il existe une isométrie directe f telle que $f(M) = N$"
C'est une relation d'équivalence :
- réflexive car l'identité est une isométrie
- symétrique car toute isométrie est bijective
- transitive car la composée de deux isométries directes est une isométrie directe

On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des couples (ordonnés) de demi-droites de même origine. L'ensemble des *angles orientés* est l'ensemble quotient $\mathcal{A}/\equiv$. Ainsi, deux couples de demi-droites représentent le même angle orienté si ils sont isométriques (par une isométrie directe)

Etant données deux parties du plan M et N, on notera $M \cong N$ la relation : il existe une isométrie f telle que $f(M) = N$. C'est une relation d'équivalence pour les même raisons que pour $\equiv$
L'ensemble des *angles géométriques* est l'ensemble $\mathcal{A}/\cong$. Ainsi, deux couples de demi-droites représentent le même angle géométrique si ils sont isométriques.

Si on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des couples (ordonnés) de droites, l'ensemble des *angles orientés de droites* est $\mathcal{B}/\equiv$ et l'ensemble des *angles géométriques de droites* est $\mathcal{B}/\cong$.

2 Addition des angles orientés

Propriété 1[OA) et [O'A') étant deux demi-droites, il existe une unique isométrie directe f qui envoie [OA) sur [O'A').
Dém : Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ les vecteurs unitaires orientant [OA) et [O'A'). On peut alors trouver deux vecteurs unitaires uniques tels que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $(O', \vec{u'}, \vec{v'})$ soient des repères orthonormés directs. Il existe alors une unique application affine qui envoie une base sur l'autre. C'est une isométrie car : si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $M' = f(M)$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O', \vec{u'}, \vec{v'})$ donc A'B' et AB s'expriment avec la même formule.
Ainsi, on peut définir une application ϕ de $\mathcal{B}$ dans O_2^+ en considérant l'application qui à un couple de demi-droites de même origine $[OA)$ et $[OA')$ associe v_f l'application linéaire associée à f.

Théorème 1 Etant donnés (s_1, s_2) et (s_3, s_4) deux éléments de $\mathcal{B}$:

$$(s_1, s_2) \equiv (s_3, s_4) \Leftrightarrow \phi((s_1, s_2)) = \phi((s_3, s_4))$$

Dém : Si ces deux élements (s_1, s_2) et (s_3, s_4) sont dans la même classe. On note v_f et v_g leurs images respectives par ϕ. Il existe une isométrie directe$h$ telle que $h(s_1) = s_3$ et $h(s_2) = s_4$.
On a donc $g(h(s_1)) = h(f(s_1))$ donc comme $g \circ h$ et $h \circ f$ sont des isométries directes, elles sont égales (propriété 1).
On a donc $v_{g \circ h} = v_{h \circ f}$ d'où $v_g \circ v_h = v_h \circ v_g$ (propriété des applications linéaires associées aux applications affines)
On sait par ailleurs que O_2^+ est commutatif donc : $v_f = v_g$
Réciproquement : si $v_f = v_g$ alors en reprenant les notations précédentes, il faut prouver que si $h(s_1) = s_3$ alors $h(s_2) = s_3$.
Soient O et O' les sommets respectifs de (s_1, s_2) et (s_3, s_4) . Alors $h(s_2) = h(f(s_1)) = [O'h(f(A)))$ avec $s_1 = [OA)$
Or $O'h(f(A)) = v_h(Of(A)) = v_h(f(\vec{O)}f(A)) = v_h(v_f(\vec{OA})) = v_h(v_g(\vec{OA})) = v_g(v_h(\vec{OA})) = O'\vec{g}(A)$
Donc $h(s_2) = s_4$

Nous avons donc établi une bijection entre l'ensemble des angles orientés et le groupe O_2^+ . Ceci donne une addition sur l'ensemble des angles orientés et même une structure de groupe.

Propriété 2(relation de Chasles) $\overline{(s_1, s_2)} + \overline{(s_2, s_3)} = \overline{(s_1, s_3)}$ (les s_i désignent des demi-droites)
Dém Si f, g et h sont des isométries directes telles que : $f(s_1) = s_2$, $g(s_2) = s_3$ et $h(s_1) = s_3$ alors $g \circ f = h$ (car $g(f(s_1)) = h(s_1)$) On en déduit la relation demandée.

Méthode alternative

Supposons donnés deux angles orientés $\alpha = \overline{(s_1, s_2)}$ et $\beta = \overline{(s_3, s_4)}$ Nous savons qu'il existe une unique isométrie directe telle que $f(s_2) = s_3$ Ainsi $\alpha = \overline{(s_1, s_2)} = \overline{(f(s_1), f(s_2))} = \overline{(f(s_1), s_3)}$ On aimerait poser $\alpha + \beta = \overline{(f(s_1), s_4)}$ (on voit facilement que si cette addition a un sens, la relation de Chasles est alors vérifiée)
Il faut montrer que ce processus ne dépend pas des représentants choisis pour les classes. Considérons deux autres couples de représentants :
$\alpha = \overline{(s_1', s_2')}$ avec une isométrie directe g telle que $g(s_1) = s_1'$ et $g(s_2) = s_2'$.
$\beta = \overline{(s_3', s_4')}$ avec une isométrie directe h telle que $h(s_3) = s_3'$ et $h(s_4) = s_4'$.
Il existe alors une unique f' isométrie directe f' telle que $f'(s_2') = s_3'$.
On considère la classe du couple $\overline{(f'(s_1'), s_4')}$. C'est aussi celle du couple $\overline{(h^{-1}(f'(s_1')), s_4)}$
Il faut donc prouver que $h^{-1}(f'(s_1')) = f(s_1)$.
Mais $h^{-1}(f'(s_2')) = h^{-1}(s_3') = s_3 = f(s_2) = f(g^{-1}(s_2'))$ et donc l'isométrie directe $h^{-1} \circ f'$ est égale à $f \circ g^{-1}$. Donc en particulier : $h^{-1}(f'(s_1')) = f(g^{-1}(s_1')) = f(s_1)$

De la même manière, on définit une addition sur les autres angles (exercice)

Propriété 3 Les angles orientés et les angles orientés de droites munis de leurs additions respectives forment un groupe. (Démonstration, sans utiliser le groupe orthogonal en exercice)
Question : pourquoi pas les autres ?

Propriété 4 Le groupe des angles orientés est isomorphe au groupe des isométries vectorielles directes. (Démonstration : exercice)

3 Mesure d'un angle

Dans cette partie, on suppose construit le plan complexe à partir de la construction des nombres réels. Ceci ne fait pas intervenir la notion d'angle. Nous allons reconstruire les fonction trigonométriques à partir de là.
On considère la série entière $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Son rayon de convergence est infini.
On pose $cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ (pour $x \in \mathbb{R}$)

Propriété 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$
Propriété 2 $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
Propriété 3 $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$ et $sin(a+b) = cos(a)sin(b) + sin(a)cos(b)$
Propriété 4 $sin' = cos$ et $cos' = -sin$
Propriété 5 Pour tout , $x \in \mathbb{R}$, $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
Démonstration : la fonction $f(x) = cos^2(x) + sin^2(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et donc la formule est vraie pour tout x.
Propriété 6 L'application $x \longmapsto e^{ix}$ est surjective $\mathbb{R}$ de dans U le groupe des nombres complexes de module 1
Démonstration :

1. Montrons que la fonction cosinus s'annule :
   Comme $cos(0) = 1$ et que la fonction cosinus est continue, il existe un $\alpha > 0$ tel que la fonction cosinus est positive sur $[0; \alpha]$
   La fonction sinus est donc strictement croissante sur cet intervalle donc $sin(\alpha) > 0$.
   Supposons que la fonction cosinus ne s'annule pas sur $[0; +[$ alors pour tout $y \geqslant 0$:
   $$\int_0^y sin(t)dt \geqslant (y-\alpha)sin(\alpha)$$
   Donc : $cos(\alpha) - cos(y) \geqslant (y-\alpha)sin(\alpha)$ et $y - \alpha \leqslant \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} - \frac{cos(y)}{sin(\alpha)}$ et comme $cos(y) > 0$, on a :
   $$y - \alpha \leqslant \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$
   Ce qui est absurde si y tend vers +
2. On note alors $\omega = inf\{y > 0, cos(y) = 0\}$
   Avec la propriété 3, on peut compléter le tableau des variations de la fonction cosinus et en déduire celui de la fonction sinus. On constate également que ces fonction sont 4ω périodiques.

Conséquence : On pose $\pi = 2\omega$. 2π est alors le plus petit réel positif tel que $e^{ix} = 1$.

Théorème 1 Si a et b sont deux reéls tels que $a^2 + b^2 = 1$ alors, il existe un réel θ tel que : $a = cos(\theta)$ et $b = sin(\theta)$

Démonstration Par la propritété 5, on sait que le nombre complexe $z = a + ib$ est dans U. D'après la propriété 6, il peut s'écrire $e^{i\theta}$.

Théorème 2 Le groupe U est isomorphe à $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.

Dém Le noyau d'un morphisme de groupe f defini sur $\mathbb{R}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Or un tel sous groupe est dense ou de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = inf\{x > 0, f(x) = 0\}$. Comme l'application $f : x \longmapsto e^{ix}$ est continue et non nulle, le noyau est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ et d'où $ker(f) = 2\pi\mathbb{Z}$. Comme de plus f est surjectif, on a le résultat demandé (voir le rappel sur les groupes).

Théorème 3 Le groupe $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ est isomorphe à O_2^+ .

Une base orthonormale étant choisie, on peut identifier les isométries à leurs écritures matricielles. Par définition, une isométrie directe a une écriture matricielle de la forme : $\begin{bmatrix} \text{a} & \text{-b} \\ \text{b} & \text{a} \end{bmatrix}$

(avec $a^2 + b^2 = 1$)

Ainsi l'application qui à θ associe l'isométrie : $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

est une application surjective de $\mathbb{R}$ dans O_2^+ . (Propriété 6)

C'est un morphisme de groupe (utiliser la propriété 3). Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. On obtient le résultat quotientant par le noyau.

4 Un rappel sur les groupes

Théorème Si f est un morphisme de groupes de G dans G' alors les groupes $f(G)$ et $G/Kerf$

sont deux groupes isomorphes. *Dém* (C'est un bon exercice que de démontrer que $f(G)$ et $G/Kerf$ sont bien des groupes ...)

On note $\overline{g}$ la classe de g dans $G/Kerf$

On note $\overline{f}$ l'application qui à $\overline{g}$ associe $f(g)$. $\overline{f}$ est bien définie car :

$$\overline{g} = \overline{g'} \Leftrightarrow g^{-1}g' = e_G \Leftrightarrow f(g^{-1}g') = e_{G'} \Leftrightarrow f(g) = f(g')$$

Il est clair que $\overline{f}$ est surjective. Mais $\overline{f}$ est aussi surjective d'après ce qui précède.

Le fait que $\overline{f}$ soit un morphisme de groupe est un jeu d'écriture :

$\overline{f}(\overline{g}^{-1}\overline{g'}) = \overline{f}(\overline{g^{-1}g'})$ par définition de la loi induite sur le groupe quotient.

$= f(g^{-1}g')$ par définition de $\overline{f}$

$= f(g)^{-1}f(g')$ car f est un morphisme de groupe

$= \overline{f}(\overline{g})^{-1}\overline{f}(\overline{g'})$ par définition de $\overline{f}$

5 Une sélection bibliographique sur le sujet

- Quelques définitions de la notion d'angle (*Atlas des mathématiques*,Livre de poche, p.137)
- Angle de vecteurs (Gostiaux, *Mathématiques spéciales T4*, PUF, p179)
- Existence de π par les séries entières (Gostiaux, *Mathématiques spéciales T3*,PUF, p159)
- Angles et structures de groupe (Tisseron, *Géométrie affine, projective et euclidienne*, Hermann, p.303)
- Isométries affines (Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, p.156)