SUITES 1^{er} Partie

Objectifs *: Modes de génération d'une suite. Suites arithmétiques. Suites géométriques.*
Modéliser et étudier une situation à l'aide de suites.
Mettre en œuvre des algorithmes permettant d'obtenir une liste de termes d'une suite, de calculer un terme de rang donné.
Etablir et connaître les formules $1 + 2 + ... + n$ et $1 + q + q^2 + ... + q^n$.

I- Modes de génération

- Une **suite numérique** ***u*** est une fonction définie sur ℕ et à valeurs dans ℝ : $\begin{array}{l} u:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto u_n \end{array}$

Ici, la variable est notée n (comme naturel puisque $n \in \mathbb{N}$). Son image par la suite u est notée u_n et se lit « u indice n ». On note cette suite (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Une suite peut être définie :
  - Soit **explicitement** à l'aide d'une fonction f de la variable $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$

Exercice 1 : Soit $u_n = n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_6

  - Soit **par récurrence** à l'aide de son premier terme et d'une relation de récurrence (autrement dit, une formule permettant de calculer un terme en fonction du précédent).

Exercice 2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0{,}15\, u_n^2 + 2 \ \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$ Calculer u_1, u_2 et u_3

Remarques :
- Quand une suite (u_n) est définie par récurrence, le calcul de u_{50} par exemple, nécessite le calcul pas à pas de tous les termes précédents. Comparativement, la formule explicite nous donnerait en un seul calcul le résultat.
- Une relation de récurrence peut faire intervenir plusieurs termes consécutifs.

- Une suite peut être représentée de deux façons différentes :
  - Sur la droite réelle : on place les points d'abscisse u_0, u_1, $...u_n$ sur un axe.
  - Dans le plan : on place les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ dans un repère.

Exercice 3 : Représenter les cinq premiers termes de la suite de l'exercice 1 des deux façons.

Exercice 4 : Pour les exemples suivants, tracer dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal, "le chemin de la suite" pour placer les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

II- Suites arithmétiques

Définition : Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Dans ce cas, r est appelé **raison** de la suite.

Autrement dit, une suite est arithmétique si et seulement si chaque terme (sauf le premier) est obtenu en ajoutant au terme précédent la même raison r.

Exemple : La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.

Propriété : Terme général : (ROC) : Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tous entiers naturels n et p, on a $u_n = u_p + (n-p)r$
En particulier : $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n-1)r$

Exercice 5 : La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 2$.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
Exercice 6 : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 2$.
Calculer U_{50}.

Propriété : (ROC) Pour tout entier naturel n, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Somme des termes d'une suite arithmétique : (ROC) : $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}}$

On peut aussi retenir : $\boxed{\text{Somme des termes} = \dfrac{(n^{bre} \text{ de termes}) \times (1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}}$

Exercice 7 : Calculer les sommes A= 1+2+3+…..+25 ; B = 100+101+102+…+116
Et C = 5+7+9+….+99

III- Suite géométrique

Définition : Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$$

Dans ce cas, q est appelé **raison** de la suite.

Autrement dit, une suite est géométrique si et seulement si chaque terme (sauf le premier) est obtenu en multipliant le terme précédent par la même raison q.
Exemple : La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Propriété : Terme général : (ROC) : Si u est une suite géométrique de raison q, alors, pour tous entiers naturels n et p, on a $u_n = u_p\, q^{(n-p)}$
En particulier : $u_n = u_0\, q^n$ et $u_n = u_1\, q^{n-1}$

Exercice 8 : La suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
a) $u_0 = 1$ et $q = 2$ b) $u_0 = -1$ et $q = -2$ c) $u_0 = 1$ et $q = \frac{1}{2}$

Exercice 9 : La suite (v_n) est géométrique de premier terme v_0 et de raison q.
Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_{20}.
a) $v_0 = 1$ et $q = 3$ b) $v_0 = 2$ et $q = -1$

Propriété : (ROC) Pour tout entier naturel n, si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Somme des termes d'une suite géométrique : (ROC) $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{pour } a \neq 1}$

On peut aussi retenir : $\boxed{\text{Somme des termes} = 1^{er} \text{ terme} \times \dfrac{1-(\text{raison})^{n^{bre} \text{ de termes}}}{1 - \text{raison}}}$

Exercice 10 : Calculer les sommes A = 1 + 3 + 9 + 27 + … + 3^{20} et B = $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$