Le produit scalaire

Terminale S

I – Rappels sur le produit scalaire dans le plan

1. Différentes expressions du produit scalaire

Définition 1: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Si l'un des vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.
- Si ces deux vecteurs sont non nuls, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v}),$$

Pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant deux représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on obtient : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Remarques : Ce produit scalaire est indépendant des représentants. On peut donc choisir des représentants de même origine.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux **vecteurs colinéaires et de même sens**, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux **vecteurs colinéaires de sens contraire**, alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

Définition 2 : Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées (x ; y) et (x' ; y'), alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Définition 3 : Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Définition 4 : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2. Propriétés :

$\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.

On a $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|$ donc $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ et $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel,

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ $\quad$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ $\quad$ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ $\quad$ $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs non nuls, sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

3. Applications à la géométrie

- Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB], alors, pour tout point M du plan, $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ (Théorème de la médiane).
- Soient ABC un triangle et a, b et c les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB], alors : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$. (cette formule porte le nom de **Al Kashi**)
  On obtient deux autres formules par permutation circulaire des lettres.

4. Équations de droites dans un plan

Définition : Un vecteur normal d'une droite est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

Propriétés : Si $\vec{n}(a ; b)$ est un vecteur normal de la droite (d), alors une équation de (d) s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$. (rappel : un vecteur directeur de (d) a pour coordonnées (-b ; a))

Réciproquement, si a et b sont deux réels non nuls, l'équation $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite dont le vecteur de coordonnées (a ; b) est un vecteur normal.

Applications : équations de perpendiculaires, hauteur, médiatrices, tangentes à un cercle.

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé, on donne les points : A(1 ; 3) ; B(2 ; 5) et C (-1 ; 4). Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A ; Déterminer une équation de la médiatrice de [BC].

II -Vecteurs dans l'espace

L'espace est repéré par $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$. Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y ; z) signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Exercice 2 : on considère un cube ABCDEFGH. Quels sont les coordonnées des points A, B, C, E, F et H dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$?

Propriété : Trois vecteurs non nuls de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres.

Par exemple s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\ \vec{u} + b\vec{v}$

Remarque : 3 vecteurs non coplanaires de l'espace forment un repère.

Propriété : Quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, ou si et seulement si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 3 : Tracer un tétraèdre ABCD, avec I milieu de [AB] , J milieu de [BC], K milieu de [CD], E tel que $\overrightarrow{\text{DE}} = \overrightarrow{\text{CA}}$ et L tel que $\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}}$. Démontrer que les quatre points I, J, K et L sont coplanaires.

III – Produit scalaire dans l'espace

1. Définition

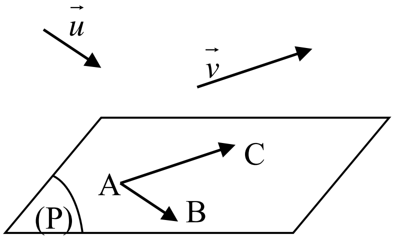
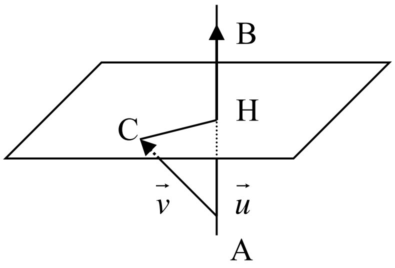
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. A, B et C trois points de l'espace vérifiant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Il existe au moins un plan (P) contenant les trois points A, B et C.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan (P).

Remarque : On admet que le produit scalaire est indépendant du choix des représentants des deux vecteurs et du choix du plan.

2. Expressions du produit scalaire

Normes et angles	**Projection orthogonale**
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert \times \cos\alpha$ où $\alpha = \widehat{BAC}$	**Si $\vec{u}$ st non nul**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

Expression analytique : Soient $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs dans l'espace muni d'un <u>repère orthonormé</u> $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. Règles de calcul (admises)

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, et tout réel k :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$	$(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$	$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

- Par définition, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls, sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

<u>Exercice 4</u> : les vecteurs $\vec{u}(5\,;-2\,;3)$ et $\vec{v}(2\,;5\,;0)$ sont-ils orthogonaux ?

4. Orthogonalité dans l'espace

Droites orthogonales

Deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

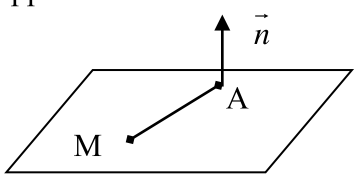
Droite et plan perpendiculaires

Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de base $(\vec{v}\,;\vec{w})$ sont perpendiculaires (ou orthogonaux) si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$.

5. vecteur normal

<u>Définition:</u> un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan (P) est appelé **vecteur normal** à (P).

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



<u>Exemple</u> **:** Soit [AB] un segment de milieu I. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est le plan médiateur du segment [AB] : c'est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

6. Équation cartésienne d'un plan dans l'espace

Dans un repère orthonormé, tout plan admet une équation de la forme **$ax + by + cz + d = 0$** , où a, b, c et d sont des réels tels que a, b et c ne sont pas tous nuls.

Le vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Réciproquement : Soient a, b, c et d quatre réels tels que a, b et c ne sont pas tous nuls.
Dans un repère orthonormé, l'ensemble (E) des points M (x ; y ; z) de l'espace vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$

Exercice 5 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,\right)$. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A (-2 ; 1 ; 3) et orthogonal à (BC) avec B(1 ; -2 ; 2) et C(4 ;1 ;-1).

Exercice 6 : Déterminer l'équation du plan médiateur à [AB] avec A(-1 ; 2 ; 3) et B(-2 ; 3 ; 1).

Exercice 7 : Soient A, B et C trois points distincts de l'espace, déterminer le lieu des points M de l'espace tels que

a) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AM} = 0$

b) $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{AB} = 0$

c) $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}\,.\overrightarrow{MB}\right) = 0$

Exercice 8 : Dans l'espace, on considère les trois points A(3 ; 2 ; 4) ; B(-6 ; 2 ; 1) et C(-7 ; 1 ; 0).

a) Montrer que les points A, B et C forment un plan de l'espace.
b) Déterminer l'équation du plan (ABC). (2 méthodes)
c) Soit le point E (3 ; 2 ; 1). Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de E sur le plan (ABC).

IV – Distance d'un point à une droite, à un plan

1. Définition : Soient (d) une droite du plan et A un point quelconque du plan. On appelle **distance du point A à la droite (d)** la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (d).
   Propriété : *Le plan est rapporté à un repère orthonormé.*

Soient (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec a et b deux réels non nuls et A (x_A ; y_A) un point du plan. La distance du point A à la droite (d) est égale à $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 9 : Dans un repère orthonormé, on donne la droite (d) d'équation 3x- 4y + 7 =0 et le point A (-2 ; 1). Déterminer la distance de A à la droite (d).

2. Distance d'un point à un plan

Soient M un point de l'espace, un vecteur non nul $\vec{n}$ et (P) le plan passant par M et de vecteur normal $\vec{n}$.
Pour un point quelconque A de l'espace dont on note H le projeté orthogonal sur le plan (P), la distance AH est égale à : $AH = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\,.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

Dans un repère orthonormal ; soient (P) le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace. la distance de A à (P) est égale à $\dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exercice 10 : Calculer la distance du point A (5 ; 2 ; -3) au plan (P) d'équation : $x + 4y + 8z + 2 = 0$.

V – Cercle et sphère

1. **équations de cercles dans le plan** : Le plan est rapporté à un repère orthonormal :

Le **cercle** de centre I (a ; b) et de rayon R est l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $IM^2 = R^2$. Une équation de ce cercle est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Le **cercle** de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

2. **Sphère dans un repère orthonormé** $\left(O \,;\, \vec{i} \,,\, \vec{j} \,,\, \vec{k}\right)$

Définition : La **sphère** de centre I (a ; b ; c) et de rayon R est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que : $IM^2 = R^2$.

Propriétés :Une équation de la **sphère** de centre I (a ; b ; c) et de rayon R est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points M (x ; y ; z) de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice 11 : Soit $\left(O \,;\, \vec{i} \,,\, \vec{j} \,,\, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

Démontrer que l'ensemble des points M (x ; y ; z) dont les coordonnées vérifient l'équation
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ est une sphère, dont on déterminera le centre I et le rayon.
Le plan (P) d'équation $x - 2y + 2z + 1 = 0$ est-il sécant à cette sphère ?

VI - Inéquation caractérisant un demi-espace

Définition : L'ensemble des points M (x ; y ; z) qui vérifient $ax + by + cz + d \geq 0$ est un **demi-espace** délimité par le plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$, frontière comprise.
L'autre demi-espace de même frontière (P), frontière comprise, est l'ensemble des points M (x ; y ; z) qui vérifient $ax + by + cz + d \leq 0$.

Exercice 12 : Dans un repère orthonormé $\left(O \,;\, \vec{i} \,,\, \vec{j} \,,\, \vec{k}\right)$ de l'espace, on donne :

A (1 ; 1 ; 1) et B (3 ; -1 ; -3).

Déterminer une équation du plan médiateur du segment [AB].
Déterminer l'inéquation du demi-espace de frontière le plan médiateur de [AB] et contenant le point B, frontière comprise.