# Probabilités Rappels de 1^er^

## 1. Vocabulaire et définition

Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé … sont des **expériences aléatoires**, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard.

A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**. Ses éléments sont appelés **éventualités**.

- Les sous-ensembles de l'univers $\Omega$ sont appelés **événements.**
- Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
- Etant donné un univers $\Omega$, l'événement $\Omega$ est **l'événement certain.**
- L'ensemble vide est **l'événement impossible.**
- L'événement formé des éventualités communes à A et B est noté $A \cap B$.
- L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B ou dans les deux est noté $A \cup B$.
- Etant donné un univers $\Omega$ et un événement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$.
- A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque : Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un **modèle** de cette expérience ; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque événement élémentaire un nombre appelé **probabilité**.

Loi des grands nombres (énoncé expérimental)

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des résultats $a_1, a_2, \dots, a_n$, la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{a_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre $p_i$ compris entre 0 et 1.

Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{a_i\}$.

Exercice 1 : Le lancer d'un dé cubique non truqué
Soit A l'événement : « obtenir un chiffre pair ».
Soit B l'événement : « obtenir un multiple de 3 ».
Décrire les événements A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 2 : Jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement : « Tirer un pique ».
Soit B l'événement : « Tirer une figure ».
Décrire les événements A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.

## 2. Probabilités sur un ensemble fini

### a) Définition

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble fini.

- on définit une **loi de probabilité** sur $\Omega$ si on choisit des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ tels que, pour tout i, $0 \le p_i \le 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ; $p_i$ est la probabilité élémentaire de l'événement $\{a_i\}$ et on note $p_i = p(\{a_i\})$ ou parfois plus simplement $p(a_i)$.
- pour tout événement E inclus dans $\Omega$, on définit p(E) comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui définissent E.

### b) Propriétés des probabilités

| Parties de $\Omega$ | Vocabulaire des événements | Propriété |
|---|---|---|
| A | A quelconque | $0 \le p(A) \le 1$ |
| $\varnothing$<br>$\Omega$ | Evénement impossible<br>Evénement certain | $p(\varnothing) = 0$<br>$p(\Omega) = 1$ |
| $A \cap B = \varnothing$ | A et B sont incompatibles | $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ |
| $\overline{A}$ | $\overline{A}$ est l'événement contraire de A | $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ |
| A, B | A et B quelconques | $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ |

Exercice : Donner les probabilités des événements des exercices 1 et 2.

Exercice 3 **:** Les astragales ou osselets, sont de petits os à quatre faces. On les numérote a, b, c, d. On lance un astragale et on note sur quelle face il retombe. Voici la loi de probabilité de cette expérience.

| Face | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |

Une étude statistique sur de très nombreux lancers a fait apparaître que : $P_1 = P_2$ ; $P_3 = P_4$ ; $P_1 = 4P_3$.
Calculer la probabilité de chacune des faces.

### c) Equiprobabilité

**Définition** : On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

**Calculs dans le cas d'équiprobabilité :** Dans une situation d'équiprobabilité, si $\Omega$ a n éléments et si E est un événement composé de m événements élémentaires ( donc m $\leq$ n) : $p(E) = \dfrac{\text{card } E}{\text{card } \Omega}$ où card E et card $\Omega$ désignent respectivement le nombre d'éléments de E et de $\Omega$. On le mémorise souvent en disant que c'est **le nombre de cas favorables** divisé par **le nombre de cas possibles**.

Remarque : Les expressions suivantes « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables » … indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité .

Exercice 4 : On place dans un sac cinq jetons marqués T, R, U, C, S. On tire au hasard l'un après l'autre et sans les remettre dans le sac trois jetons. On lit les lettres obtenues.
**1.** Déterminer à l'aide d'un arbre le nombre des issues de l'expérience.
**2.** Calculer la probabilité des événements M, N et P.
M : « le $1^{er}$ jeton tiré porte la lettre U ».
N : « il n'a été tiré que des consonnes »
P : « Les jetons T et S n'ont pas été tirés ».

### d) Paramètres associés

Si les issues de l'expérience aléatoire sont des nombres réels $a_i$, on peut définir les nombres suivants :

- **l'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre $\mu$ défini par :
  $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$ , cela correspond à **une moyenne**.
- **la variance** de la loi de probabilité est le nombre V défini par :
  $$V = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \ (a_i - \mu)^2 = (\sum_{i=1}^{i=n} p_i a_i^2) - [\mu]^2$$
  C'est la *moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*
- **l'écart - type** de la loi de probabilité est le nombre $\sigma$ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.