1er S PROBABILITES

Objectifs *: Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance, variance et écart type.*
Déterminer et exploiter la loi d'une VA. Interpréter l'espérance comme valeur moyenne.

I- Variable aléatoire

1) Définition d'une variable aléatoire

Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire X discrète** définie sur Ω est une fonction qui, a chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les valeurs prises par X,
on note **(X=x_i) l'évévement « X prend la valeur x_i »** et **p(X= x_i) la probabilité de cet événement**.

Exemple : Un jeu de hasard se déroule suivant le protocole suivant : Le joueur mise 200 F puis il lance deux dés cubiques équilibrés portant les numéros de 1 à 6. S'il obtent « un double », alors il récupère sa mise et reçoit une somme égale au total des points marqués *100 ; sinon il ne reçoit rien et perd sa mise.
On considère l'expérience aléatoire : lancer les deux dés. L'univers de cette expérience est l'ensemble des couples (x ; y) avec $1 \le x \le 6$ et $1 \le y \le 6$. Les dés étant bien équilibré, les issues sont équiprobables, de probabilité 1/36.

Exercice 1 : On définit X : la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur. Réaliser un tableau à double entrée pour y noter la V.A. X.

2) Loi de probabilité d'un variable aléatoire

La **loi de probabilité de X** est la donnée pour chaque valeur x_i de la probabilité $p(X= x_i)= p_i$
On la présente en général dans un tableau où les x_i sont rangées dans l'ordre croissant.

Valeur x_i	x_1	x_2	…	x_r
$p(X= x_i)$	p_1	p_2		p_r

La somme $p_1+p_2+\ldots+p_r = 1$.

Exercice 2 : Définir la loi de probabilité de l'exercice 1.

II- Paramètre d'une variable aléatoire

1) Définitions

X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est representée par le tableau suivant :

Valeur x_i	x_1	x_2	…	x_r
$p(X= x_i)$	p_1	p_2		p_r

• **L'espérance mathématique de X est le nombre** $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{r} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_rx_r}$

elle est dans la même unité que les valeurs de X.

La loi des grands nombres dit qu'en répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire dans des conditions identiques, les fréquences d'apparition qu'on observera pour chaque valeur seront proches de la probabilité d'obtenir cette valeur et que la moyenne des valeurs observées sera proche de l'espérance.
L'espérance est la valeur moyenne que l'on peut espérer en répétant un grand nombre de fois cette expérience.

• Les deux formules suivantes donnent le même résultat qu'on appelle **la variance de X**

$$V(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{r} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2 = p_1\times(x_1-E(X))^2+p_2\times(x_2-E(X))^2+\ldots+p_r\times(x_r-E(X))^2$$

$$\boxed{V(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{r} p_i x_i^2-\left(E(X)\right)^2 = p_1\times x_1^2+p_2\times x_2^2+\ldots+p_r\times x_r^2-\left(E(X)\right)^2}$$

(plus pratique pour les calculs)
V(X) est toujours positif. C'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

• **L'écart-type de X** est le nombre $\boxed{\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{V(\mathrm{X})}}$, il est dans la même unité que les valeurs de X.
L'écart-type mesure la dispersion des valeurs, en tenant compte de leur probabilité, par rapport à l'espérance.

Exercice 3 : Déterminer par le calcul E(X) , V(X) et $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{V(\mathrm{X})}$ pour l'exemple. Puis vérifier avec votre calculatrice.

2) Propriétés de l'espérance et de la variance

(ROC) X est une variable aléatoire. Pour tous nombres réels *a* et *b*, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b\\ \mathrm{V}(a\mathrm{X})=a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})\end{array}}$$

Problème
Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes « a » ou « b ».
On estime que 5% des appareils sont concernés au moins par la panne « a », 3% au moins par la panne « b », 1% par les deux pannes.
On prélève au hasard un appareil dans la production.
On note A l'événement : l'appareil présente la panne « a »
On note B l'événement : l'appareil présente la panne « b »

1. a) Déterminer $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

b) Quelle est la probabilité pour cet appareil de ne présenter aucune des deux pannes ?

c) Quelle est la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » et pas la panne « b » ?

2. L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200€. La réparation d'une panne « a » coûte 60€ à l'entreprise, la réparation d'une panne « b » coûte 40€ et la réparation de deux pannes coûte 100 €.

On considère la variable aléatoire X qui à chaque appareil associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Que représente-t-elle pour l'entreprise ?