1^er^ S

LOI BINOMIALE

Objectifs *: Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues. (représentation par un arbre pondéré)*
Epreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
Schéma de Bernoulli, loi Binomiale : Espérance, variance et écart type de la loi binomiale. Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale. Représenter graphiquement une loi binomiale. Utiliser l'espérance dans des contextes variés.
Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.

I- Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Il y a **répétition d'expériences identiques**, lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite. Ces expériences aléatoires successives sont **indépendantes** lorsque l'issue de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

Cette situation peut être représentée par un **arbre pondéré** :

- Dans ce cas, une issue est une liste ordonnée de résultats, représentée par un chemin.
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issue d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de A.

Exercice 1 : Une urne contient cinq jetons **indiscernables au toucher** : deux bleus, deux rouges et un noir. **L'expérience aléatoire** consiste à tirer au hasard successivement deux jetons de l'urne **avec remise** et à noter les couleurs.
On note B l'événement « tirer un jeton bleu » ; R l'événement « tirer un jeton rouge » et N l'événement « tirer un jeton noir ».
a) Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue (R ;N) ; puis l'issue (R ; B).
c) On note U l'événement « obtenir un tirage Unicolore ». Déterminer la probabilité de U.
d) On considère la variable aléatoire X qui indique le nombre de jetons rouges obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X.

II- Epreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

Les Bernoulli, qui se sont illustrés dans les mathématiques et la physique, sont issus de Nicolas Bernoulli (1623-1708), descendant d'une famille ayant émigré d'Anvers à Bâle à la fin du xvi^e^ siècle.Les représentants les plus connus de la **famille Bernoulli**, sont : Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas (1623-1708), et Daniel (1700-1782), son petit-fils. **Jacques ou Jakob Bernoulli** (27 décembre 1654, Bâle - 16 août 1705) est un mathématicien et physicien suisse. Son œuvre majeure est : *Ars Conjectandi* publiée après sa mort à Bâle en 1713, avec une préface de son neveu Nicolas Bernoulli. Il y pose les principes du calcul des probabilités.

Définition : Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès (noté S) et échec (noté $\bar{S}$), de probabilités respectives p et q = 1 – p.

La loi de probabilité est appelée *loi de Bernoulli* de paramètre p.

issue	S	$\bar{S}$
probabilité	p	1 – p

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de bernoulli est telle que : E(X) = p et V(X) = p(1-p)

Exercice 2 : Une urne contient 70 boules rouges et 30 boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne. Expliquer pourquoi cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès « le tirage d'une boule rouge ». Donner la loi de probabilité.

III- Loi Binomiale

1) Définitions

a) Un *schéma de Bernoulli* est la répétition de *n* épreuves de Bernoulli **identique**s dans des conditions d'**indépendance**.

b) X est la variable aléatoire qui, à chaque liste de *n* résultats, associe le nombre de succès.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée *loi binomiale de paramètre n et p*. Cette loi est notée B (*n* ; *p*).

c) Pour tout entier *k*, $0 \leq k \leq n$, le nombre de chemins réalisant *k* succès est noté $\binom{n}{k}$. On lit « k parmi n ».

Ces nombres entiers $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Calculatrice :

2) Propriétés

a) Pour tout entier k, avec 0 ≤ k ≤ n, $\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$

b) L'espérance mathématique est $E(X)=np$ **et la variance** $V(X)=np(1-p)$. (Propriétés admises)

Exercice 3 **:** On reprend l'exercice précédent et on réalise de manières indépendantes 5 expériences. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges obtenues après les 5 expériences. Justifier la loi de probabilité de X. Calculer P(X=2) ; P(X=0) ; P(X ≥2) ; E(X) et interpréter. Représenter graphiquement la loi de probabilité.

IV- Coefficients binomiaux

1) Propriétés

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 1.

- $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$
- Pour tout entier *k*, $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- Pour tout entier *k*, $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Exercice 4 : A la calculatrice, calculer $\binom{12}{4};\binom{5}{3};\binom{6}{4}$

Exercice 5 : Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

2) Triangle de Pascal

L'idée du triangle de Pascal est de présenter les $\binom{n}{k}$ ou C_n^k sous forme de tableau à double-entrées.

En colonne, les valeurs de k et en ligne les valeurs de n.
Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la k-ème colonne et n-ème ligne est le coefficient $\binom{n}{k}$. Or les formules précédentes montrent deux choses.

1: Il y a une symétrie dans ce tableau car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2: Si on connait les éléments de la ligne n, on connait automatiquement ceux de la ligne n+1 par la formule $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ D'où le Triangle de Pascal :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**		**k**	**k+1**
0	**1**	**0**						
1	**1**	**1**	**0**					
2	**1**	**2**	**1**	**0**				
3	**1**	**3**	**3**	**1**	**0**			
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
n								
n+1								

<u>Exercice 6 :</u> Développer $(a + b)^2$; $(a + b)^3$; $(a + b)^4$. Écrire les résultats en utilisant les nombres $\binom{n}{k}$