Heuristiques et mathématiques

Chaque méthode de résolution s'applique à un nombre restreint de problèmes indépendamment des données et fait partie de la démarche de l'élève pour arriver à une solution. Un problème peut être résolu par une seule stratégie ou par une combinaison de stratégies. Un même problème peut être résolu par des stratégies différentes. Plus un élève connaît des stratégies, plus il devient habile en résolution de problèmes. L'élève peut avoir à sa disposition ou se construire un référentiel adapté à ses capacités et à ses connaissances. L'usage abusif qui consiste à imposer des stratégies diminue l'habileté à résoudre des problèmes. Les stratégies peuvent être partagées en cinq classes: application, enchaînement logique, expression physique, recherche, représentation. La plupart des problèmes, sinon tous, peuvent être résolus en appliquant plus d'une stratégie à la fois.

Pour la résolution de problèmes ouverts, seules les trois classes de stratégies suivantes seront abordées et dans chacune seuls quelques exemples seront fournis en annexe.

A. Stratégies d'enchaînement logique

1. Analyser les données.
2. Composer un programme.
3. Exclure les données superflues.
4. Faire une fausse supposition.
5. Faire une observation raisonnée.
6. Faire une superposition.
7. Partir de l'unité.
8. Prendre un raccourci.
9. Prioriser des données.
10. Procéder par analogie.
11. Procéder par approximation.
12. Procéder par bonds.
13. Procéder par déduction.
14. Procéder par élimination.
15. Procéder par étapes concourantes.
16. Procéder par induction annexe 1
17. Procéder par itération. annexe 2
18. Procéder par progression.
19. Procéder par régression.
20. Résoudre un problème auxiliaire.
21. Simplifier les données.

B. Stratégies de recherche.

1. Changer de perspective.
2. Choisir d'autres données.
3. Consulter une table.
4. Procéder par comptage.
5. Procéder par recherche systématique.
6. Procéder par tâtonnement.
7. Rechercher les combinaisons.
8. Rechercher les données implicites.
9. Rechercher une formule.
10. Rechercher une règle.
11. Rechercher une régularité.
12. Réduire le champ de recherche.
13. Repérer les pièges.

C. Stratégies de représentation

1. Classer les données.
2. Construire des modèles annexe 4
3. Construire un diagramme.
4. Construire un graphique.
5. Construire un tableau.
6. Construire une table. annexe5
7. Décomposer en sous-problèmes.
8. Dresser une liste ordonnée.
9. Faire un dessin.
10. Faire un schéma.
11. Faire une construction.
12. Prendre des exemples.
13. Illustrer les données
14. Utiliser des symboles graphiques.

Annexe 1 : Procéder par induction

- Stratégie de résolution de problèmes qui consiste à choisir certaines données d'où l'on tire des résultats qui, une fois comparés, permettent d'aboutir à une proposition générale. Cette proposition, qui est alors appliquée au problème donné, peut s'exprimer par une loi ou par une formule. Cette stratégie est fragile. La validité des conclusions n'est pas nécessairement assurée. En effet, l'induction conduit parfois à une conjecture qui peut se révéler fausse à la suite de la découverte d'un contre-exemple. Pour s'assurer de la validité des conclusions, il faut se référer à l'induction mathématique qui est un raisonnement par récurrence.

Problème 1.
Combien peut-on compter de carrés de toute grandeur dans une grille 10 × 10 ?

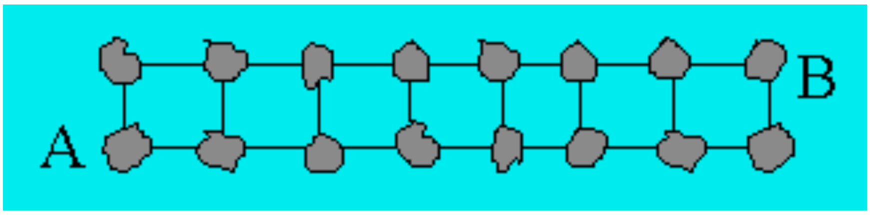
Démarche. On compte le nombre de carrés dans des grilles plus petites. Dans une grille 1×1, on compte un carré. Dans une grille 2×2, on compte quatre carrés d'une unité et un carré de quatre unités : cinq carrés. Dans une grille 3×3, on compte neuf carrés d'une unité, quatre carrés de quatre unités et un carré de neuf unités : 14 carrés. Dans une grille 4×4, on compte 16 carrés d'une unité, neuf carrés de quatre unités et quatre carrés de neuf unités et un carré de 16 unités : 30 carrés. Voici un tableau qui montre les résultats précédents :

Grandeur	1 × 1	2 × 2	3 × 3	4 × 4
Carrés	1	5	14	30

Quand on passe à une grille plus grande, on augmente d'un carré parfait le nombre de carrés. Ainsi, on a 1 + 4 = 5, 1 + 4 + 9 = 14, 1 + 4 + 9 + 16 = 30. En continuant ainsi, on peut compter 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385 carrés de toute grandeur dans une grille 10 × 10. On pourrait aussi trouver une formule générale qui est :

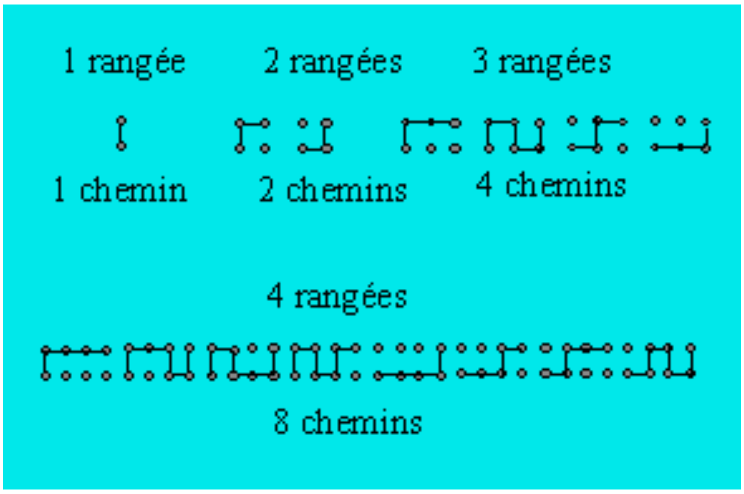
$$\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$ dans laquelle n est le nombre d'unités du côté de la grille.

Problème 2. Seize roches sont reliées l'une à l'autre par 22 bouts de ficelle comme ceci:



Une mouche part du point A pour se rendre au point B. Elle se dirige toujours de gauche à droite. Toutefois, elle peut aller de haut en bas ou de bas en haut. La mouche doit passer par le plus grand nombre de chemins différents. Combien de chemins la mouche pourra-t-elle emprunter ?

Démarche. S'il y avait une seule rangée verticale de deux roches, la mouche pourrait parcourir un chemin. En ajoutant une rangée, on trouve deux chemins. En ajoutant une autre rangée, on trouve quatre chemins. Puis, en en ajoutant encore une autre, on obtient huit chemins. En voici l'illustration :



Le résultat pour chaque cas est donné par 2 dont la puissance est le nombre de rangées verticales diminué de 1. Pour 16 roches ou 8 rangées, la mouche franchira 27 = 128 chemins.

Annexe 2 : Procéder par itération

- Stratégie de résolution de problèmes qui consiste à progresser par répétition d'un raisonnement ou d'un calcul.

Problème 1. Un livre a 1245 pages. Combien a-t-il fallu de chiffres 2 pour le paginer ?

Démarche. On cherche le nombre de fois où 2 est l'unité. On a la suite : 2, 12, 22, 32, ... , 1242. Ce qui donne 125 fois le 2 comme unité. On cherche le nombre de fois où 2 est la dizaine. On a la suite : 20, 21, 22, ... 29, 120, 121, 122, ..., 129, ... 1220, 1221, 1222, ... , 1229. Ce qui donne 130 fois le 2 comme dizaine. On cherche le nombre de fois où 2 est la centaine. On a la suite : 200, 201, 202, ... 299, 1200, 1201, ... , 1245. Ce qui donne 146 fois le 2 comme centaine. Il n'y a aucune unité de mille pour 2. Il a fallu écrire 401 chiffres 2.

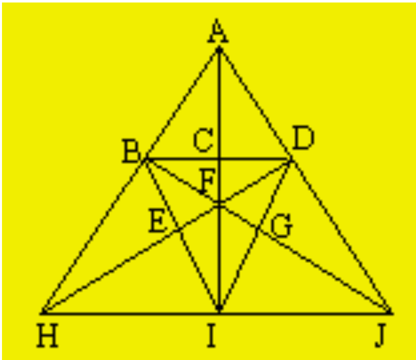
Problème 2. Anuk a un sac de 90 billes, toutes de même masse, sauf une qui est plus lourde. Les billes ont la même apparence. Anuk dispose d'une balance à plateaux. Il veut identifier la bille la plus légère en quatre pesées. Pouvez-vous l'aider ?

Démarche. On partage le sac en trois parties : 30, 30, 30. On prend deux groupes de 30 billes pour les peser. Si les deux groupes ont la même masse, la bille cherchée est dans le troisième groupe de 30. S'ils n'ont pas la même masse, elle est dans le groupe le moins pesant. On prend le groupe de 30 où est la bille la plus légère. On le partage en trois parties : 10, 10, 10. On fait la même opération et le même raisonnement. On connaît le groupe de 10 où est la bille. On partage le groupe en deux parties : 5, 5. Faisant de même, on connaît le groupe de 5 où est la bille. On partage le groupe de 5 en trois parties : 2, 2, 1. Par raisonnement identique, on peut identifier la bille cherchée.

Annexe 3 : Procéder par recherche systématique

- Stratégie de résolution de problèmes qui consiste à traiter des nombres ou autres éléments d'une façon organisée et méthodique jusqu'à ce qu'on obtienne la solution. La recherche systématique permet de vérifier toutes les possibilités et ainsi de découvrir s'il y a plus d'une solution à un problème. Elle peut être accompagnée de raisonnements et de déductions. La recherche systématique se fait parfois par itération.

Problème 1. Combien y a-t-il de triangles de toute grandeur dans cette figure ?



Démarche. Quatre règles seront appliquées pour rendre la recherche systématique.

1. On trouve les triangles commençant par A, puis par B, etc.
2. On ne considère pas les lettres antérieures à la première. Quand on arrive à C, par exemple, on considère ni A ni B.
3. On identifie un triangle en plaçant les lettres par ordre alphabétique.
4. La liste des triangles est faite par ordre alphabétique.

Voici la liste par ordre alphabétique :

- Par A. ABC, ABD, ABF, ABI, ABJ, ACD, ADF, ADH, ADI, AFH, AFJ, AHI, AHJ, AIJ : 14 triangles
- Par B. BCF, BCI, BDE, BDF, BDG, BDH, BDI, BDJ, BEF, BEH, BFH, BFI, BGI, BHI, BHJ, BIJ : 16 triangles
- Par C. CDF, CDI : 2 triangles
- Par D. DEI, DFG, DFI, DFJ, DGJ, DHI, DHJ, DIJ : 8 triangles
- Par E. EFI, EHI : 2 triangles
- Par F. FGI, FHI, FHJ, FIJ : 4 triangles
- Par G. GIJ : 1 triangle

Il y a 47 triangles de toute grandeur.

Problème 2. Parmi les entiers de 1 à 10, combien y a-t-il de groupes de trois nombres différents dont la somme est 18 ?

Démarche.

- On part de 1, il reste 17 qui se décompose en (7, 10) et (8, 9).
- On part de 2, il reste 16 qui se décompose en (6, 10) et (7, 9).

- On part de 3, il reste 15 qui se décompose en (5, 10), (6, 9), (7, 8).
- On part de 4, il reste 14 qui se décompose en (5, 9), (6, 8).
- On part de 5, il reste 13 qui se décompose en (6, 7).

La recherche est terminée. Il y a 10 groupes.

Trois règles ont été appliquées :

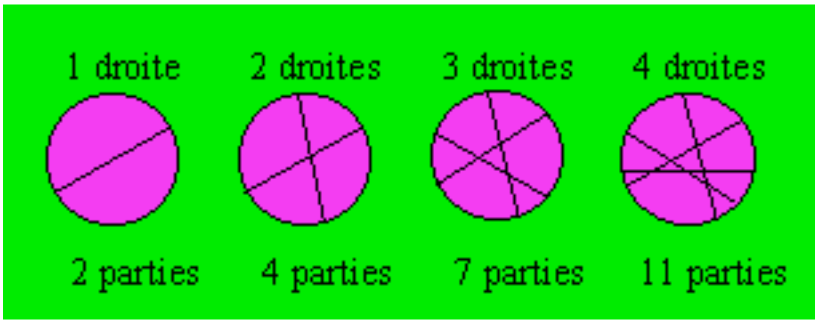
1. Partir de 1 et procéder par bond d'une unité.
2. Le nombre de départ est, par la suite, exclu.
3. Les nombres sont écrits en ordre croissant dans un même groupe.

Annexe 4 : Construire des modèles

Stratégie de résolution de problèmes qui consiste à représenter la situation en des formes réduites, à traiter chacune des formes, à analyser les relations qui existent entre elles et à induire pour aboutir au résultat. Cette stratégie peut permettre d'observer des régularités. Elle en est une de représentation.

Problème 1. Un cercle étant donné, tracez 10 lignes droites dont les extrémités touchent au cercle. Vous devez obtenir le plus grand nombre de parties. Combien de parties pouvez-vous obtenir ?

Démarche. Voici ce qui se passe quand on trace les quatre premières droites :



On remarque qu'il y a une augmentation de deux parties pour le deuxième cercle par rapport au premier, une augmentation de trois parties pour le troisième cercle par rapport au deuxième et une augmentation de 4 parties pour le quatrième cercle par rapport au troisième. On peut exprimer cela ainsi : 1er cercle : 2 ; 2^{e} cercle : 2 + 2 ; 3^{e} cercle : 2 + 2 + 3 ; 4^{e} cercle : 2 + 2 + 3 + 4.

Ainsi, 2 + (2 + 3 + 4 + ... + 10 + 11 + 12) = ... Le 12^{e} cercle contient 79 parties.

D'après cette régularité, on peut formuler les deux propositions suivantes qui expriment d'ailleurs la même situation :

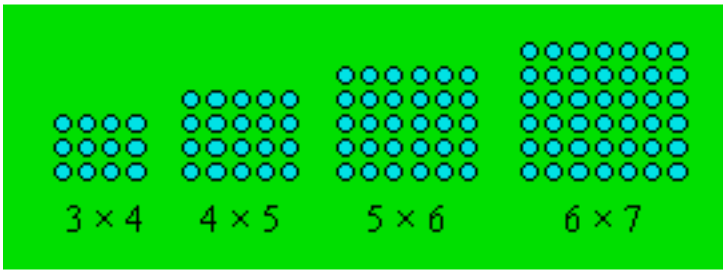
1. Dans un cercle, le nombre de parties est égal à la somme du nombre de droites et le nombre de parties du cercle précédent.

2. D'un cercle à l'autre, le nombre de parties augmente du nombre correspondant au rang de la dernière droite tracée.

On peut exprimer cette régularité par une formule algébrique : Soit m le nombre de parties et n le nombre de cercles, alors $m = (n^2 + n + 2)/2$.

Problème 2. Monsieur Lafeuille est fier de son verger. La première année, il a planté 12 pommiers. La deuxième année, il en a planté 20. La troisième année, il en a planté 30. La quatrième année, il en a planté 42. En continuant selon le même rythme, combien Monsieur Lafeuille a-t-il planté de pommiers la 10^e année ?

Démarche. On peut représenter les nombres donnés par un rectangle de points.



On voit que chaque nombre est le produit de deux entiers consécutifs. Le premier facteur du premier nombre est 3 ; celui du deuxième est 4 ; celui du troisième est 5 ; celui du quatrième est 6. Celui du 10^e nombre sera 12. Le nombre cherché est $12 \times 13 = 156$. Monsieur Lafeuille a planté 156 pommiers la 10^e année.

Annexe 5 : Construire une table

- Stratégie de résolution de problèmes qui consiste à représenter la situation par une table.

Problème
Quelle est la probabilité d'obtenir 6 en lançant deux dés simultanément ?

Démarche.
On construit une table en plaçant en abscisse et en ordonnée les nombres de 1 à 6.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

On voit 5 possibilités sur 36. La probabilité est de 5/36. Cette table est un sous-ensemble de la table d'addition. On aurait pu écrire les nombres dans chaque case ; mais, ce n'est pas nécessaire. Ainsi présentée, la solution se dégage visuellement.

Annexe 6 : Illustrer les données

Stratégie de résolution de problèmes qui consiste à représenter les données dans des dessins ne comportant que les traits essentiels des objets. Cette stratégie en est une de représentation.

Problème
Sophie a trois récipients : un de trois litres, un de cinq litres et un de six litres. Le récipient de six litres est rempli ; les autres sont vides. Comment Sophie fera-t-elle pour emplir un récipient contenant exactement quatre litres d'eau ?

Démarche. Voici les trois opérations :