Équation différentielle 2ème partie

Terminale S

Définition : On appelle **équation différentielle** le problème consistant à rechercher les éventuelles fonctions, appelées solutions de l'équation et traditionnellement notées $y(x)$, vérifiant une relation donnant, en tout point x de l'intervalle I de définition de y, la dérivée $y'(x)$ en fonction des réels x et $y(x)$. Cette relation peut être complétée par une condition initiale, imposant à ces fonctions y de prendre une valeur réelle donnée c en un point a de I ($y(a) = c$).
Rq : Une équation différentielle peut n'avoir aucune solution, ou au contraire en posséder plusieurs, voire une infinité.

1. Equation différentielle $y' = ay$

Théorème ROC : Soit a un réel donné non nul. L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions f telles que $f(x) = C\, e^{ax}$ où C est une constante réelle quelconque. Quels que soient les réels x_0 et y_0, l'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution telle que $f(x_0) = y_0$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3y' - 5y = 0$ et $y(1) = 2$

2. Equation différentielle $y' = ay + b$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants.

Théorème : ROC Soient a et b deux réels non nuls et un point A (x_0 ; y_0).
L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution f telle que $f(x) = C\, e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ et dont la courbe passe par le point A. On calcule la constante C en exprimant $f(x_0) = y_0$.

($-b/a$ est une solution particulière de $y' = ay+b$ et Ce^{ax} est une solution générale de $y' = ay$)

Exercice 2 : a) Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y + 3 = 0$.
b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(2) = 1$.

Exercice 3 : Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2e^{2x}$

1) Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (2x+5)\, e^{2x}$ est une solution de l'équation (E).
2) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' - 2y = 0$
3) a) Montrer que $f_0 + u$ est solution de (E) si et seulement si u est solution de (E_1).
   b) En déduire toutes les solutions de (E)
4) Déterminer la solution f de (E) telle que la tangente en 0 à la courbe de f a un coefficient directeur égal à 2.