Dérivation

Terminale S

I] Nombre dérivé

1) Nombre dérivé :

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et (a+ h) deux élements de I (h réel quelconque non nul) . La fonction f est dérivable en a lorsque le **taux de variation de *f* entre *a* et *a*+*h*** tend vers **un nombre réel L** , c'est-à-dire $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$.

Cette limite est le nombre dérivé en *a*, on le note *f* ' (a)

On a aussi $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$.

Le taux de variation de la fonction f entre a et a+ h (appelé aussi taux d'accroissement) représente le coefficient directeur de la sécante à la courbe de f aux points (a ; f(a)) et (a+h ; f(a+h))

Remarques : Si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est un nombre réel L , on dit que la fonction f est dérivable à droite en a et que L est le nombre dérivé à droite de f en a . f_d' (a). La courbe représentative de f a alors une demi-tangente de coefficient directeur L en A(a ; f(a))

(Propriété similaire avec une limite à gauche et un nombre dérivé à gauche)

Pour qu'une fonction *f* soit dérivable en a, il faut qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en a et que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux.

Exercice 1 : Déterminer le nombre dérivé de $x \longrightarrow 2x^2 + 1$ en 2.

Exercice 2 : Démontrer que la fonction $x \longrightarrow |x - 5|$ n'est pas dérivable en 5.

2) Application graphique : Equation de tangente

Définition : La courbe représentative de f a pour **tangente** en A(a ; f(a)) la droite (T) de **coefficient directeur** ***f* ' (a).** alors **(T) a pour équation** $\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$ **.**

Cas particulier: Si f' (a) = 0, (T) est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Exercice 3:Déterminer la tangente à la courbe représentative de $f : x \longrightarrow 2x^2 + 1$ au point d'abscisse 2.

3) Application numérique : Approximation affine :

Si f est dérivable en a, on peut écrire $\boxed{f(a + h) = f(a) + f'(a) . h + h\, \varepsilon(h)}$

ε étant une fonction de limite 0 en 0.

On dit que *f*(a) + *f* ' (a) . h est une approximation affine locale de *f*(a + h) . Localement, on peut remplacer la fonction f par la fonction affine représentée par la tangente (T), c'est à dire qu'on peut remplacer $f(a + h)$ par $f(a) + hf'(a)$ lorsque h est voisin de zéro.

(On peut même démontrer que c'est la "meilleure" approximation affine de f(a + h))

Exercice 4 : Soit la fonction f telle que $f(1)=0$ et $f'(x) = 2x$. Calculer une valeur approchée de $f(1,2)$ puis de $f(1,4)$.

4) Propriété A démontrer

Une fonction dérivable en *a* est continue en *a*. (La réciproque est fausse)

Application : tout fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

II] Fonction dérivée

1) Définition :

Si une fonction f est dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
L'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée **fonction dérivée** de f.
La fonction dérivée de f est notée f'.

Remarque: Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f' sera notée f'' ou $f^{(2)}$, on l'appelle dérivée seconde de f.
On peut ainsi, par itérations, définir si elle existe la dérivée d'ordre n de f que l'on notera $f^{(n)}$.

2) Ecriture différentielle :

Si f est dérivable en x, on peut écrire $\boldsymbol{f(x+h) = f(x) + f'(x) \times h + h\,\varepsilon(h)}$ **avec** $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

c'est-à-dire $f(x + h) - f(x) = f'(x) \times h + h\,\varepsilon(h)$
En prenant pour h un petit accroissement de x, noté Δx, et en notant Δy l'accroissement de f correspondant, on peut écrire $\Delta y = f'(x)\ \Delta x + \Delta x\ \varepsilon(\Delta x)$. On a donc $\boldsymbol{\Delta y \simeq f'(x)\ \Delta x}$

On utilisera alors parfois la **notation différentielle** : $\boldsymbol{dy = f'(x)\,dx}$ ou encore $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

3) Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
k réel	0	$]-\infty\,;+\infty[$
x	1	$]-\infty\,;+\infty[$
x^2	$2x$	$]-\infty\,;+\infty[$
x^3	$3x^2$	$]-\infty\,;+\infty[$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$]-\infty\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$-\,n\,x^{-n-1}$	$]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$]-\infty\,;+\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$]-\infty\,;+\infty[$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\ldots\ ]-\pi/2;\ \pi/2[\ \ldots$

4) Opérations sur les dérivées :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors

- $u + v$ dérivable sur I, et on a : $\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$
- $u\,.\,v$ dérivable sur I, et on a : $\boxed{\boldsymbol{(u.v)' = u'.v + u.v'}}$
- Si $a \in \mathbb{R}$, au est dérivable sur I, et on a : $\boldsymbol{(a.u)' = a.u'}$
- Si u ne s'annule pas sur I , alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a: $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}}$

5) Dérivée de la composée de deux fonctions :

Théorème : ROC : **Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, si v est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J,**

alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $\boxed{(v \circ u)' = u' \cdot (v' \circ u)}$

Corollaires :

- Soient a et b deux réels, f une fonction dérivable sur un intervalle J et soit I un intervalle tel que pour tout x de I on a $ax + b \in$ J. La fonction g définie par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable sur I et $\boxed{g'(x) = a f'(ax + b)}$.

ainsi $(\cos(ax+b))' = - a \sin(ax+b)$; $(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors :

  $\sqrt{u}$ est une fonction dérivable sur I et on a $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors :

  pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ u^n est une fonction dérivable sur I et on a $\mathbf{(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}}$.

  (si de plus u ne s'annule pas, le résultat ci-dessus peut être appliqué avec n entier relatif)

Exercice 5 : Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = (\tan(x))^2$; de $g(x) = \sqrt{3x+4}$ et de $h(x) = \cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$

III] Dérivée et sens de variation

Théorème (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- **f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$.**
- **f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.**
- **f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.**

Si **f' est strictement positive** sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors **f est strictement croissante** sur I.
Si **f' est strictement négative** sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors **f est strictement décroissante** sur I.

Remarque :
Pour étudier les variations d'une fonction, on pourra successivement :

- Chercher l'ensemble de définition dans le cas où il n'est pas donné.
- Etudier la dérivabilité de la fonction.
- Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble de dérivabilité.
- Etudier soigneusement le signe de la dérivée (ce qui inclut la recherche des zéros de la dérivée et l'étude de son signe)
- Dresser le tableau de variation complet de f ce qui suppose de déterminer les valeurs et les limites de f aux bornes des intervalles de monotonie.

Exercice 6 : Etudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Exercice 7 : Etudier les variations de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

Théorème (admis) : f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, a est un réel de cet intervalle.
Si f admet un maximum ou un minimum local en a alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse.
Pour qu'une fonction f admette un extremum local en a il faut que la fonction dérivée **s'annule en a en changeant de signe.**