Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

I] Continuité

1) Définition : Soit une fonction numérique f et a un réel. On dit que f est continue en a si $a \in D_f$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. ou $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Définition : Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle I, on dit que ***f* est continue sur I** si f est continue en tout point a de I.

Graphiquement, cela signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon.

2) Propriétés (admises):

Toute fonction polynôme (à coefficients réels) est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle (à coefficiens réels) est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

3) Opérations :

Si u et v sont continues sur I, alors $u + v$, ku avec k réel , $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I. $\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Exercice 1 : justifier que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et étudier la continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{3x+7}{x-3}$

4) Contre exemple : La fonction Partie Entière

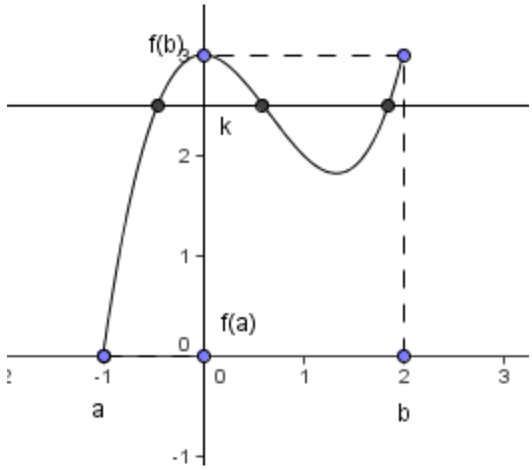
La fonction partie entière, notée E est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par **:E(x) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.**
Par conséquent, si x désigne un réel et n un entier relatif, E(x) = n si et seulement si n $\leq x <$n+1

Exemples : •E(4) = 4
•E(6, 2) = 6
•E(-2) = -2
•E(-4, 3) = -5

Exprimer E(π) ; E(x) pour x $\in$ [0;1[; [1;2[; [-1;0[
Tracer la courbe de la fonction partie entière sur [-3;3[
La fonction partie entière n'est pas continue en 1 mais est continue sur $[0;1[$.

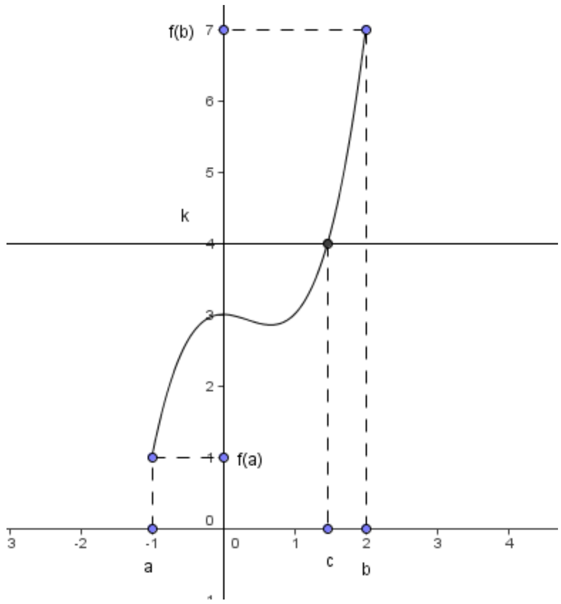
Exercice 2 : Activité 1 page 48 (hyperbole)

II] Théorème des Valeurs Intermédiaires : (admis)



1) TVI : Si la fonction f est définie et **continue** sur un intervalle I, si a et b sont deux valeurs de I et $\boldsymbol{k}$ **un réel compris entre** $\boldsymbol{f(a)}$ **et** $\boldsymbol{f(b)}$, alors **il existe au moins** un réel c tel que $f(c) = k$.

2) Corollaire du TVI, Théorème de la bijection : (ROC) à démontrer



Si la fonction f est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a ; b]$, alors pour tout réel $\boldsymbol{k}$ **compris entre** $\boldsymbol{f(a)}$ **et** $\boldsymbol{f(b)}$, l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ **admet une solution unique** dans $[a ; b]$. On dit que f réalise une **bijection** de $[a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$ ou $[f(b) ; f(a)]$ selon que f est croissante ou décroissante.

Cas particulier : Si f réalise une bijection (donc toutes les conditions précédentes) et que $\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans I.
Attention: le Théorème de bijection prouve l'unicité de solutions.
Application : Pour obtenir des valeurs approchées ou des encadrements de ces solutions, plusieurs méthodes sont possibles : par balayage (tableur) ou par dichotomie .

Exercice 3:
Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $x^5+2x-1 = 0$ et donner une valeur approchée à 0.1 près des solutions .
Exercice 4 : Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x = 2\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ .On montrera que les solutions ne peuvent appartenir qu'à [-2 ; 2] puis on donnera un encadrement des solutions éventuelles d'amplitude 10^{-2}

Utiliser la calculatrice pour déterminer un encadrement à 10^{-2} près de la solution.

3) Bijection réciproque : (hors programme)

Définition : Soit A et B deux ensembles quelconque et f une fonction numérique définie sur A et à valeurs dans B. On dit que **f est une bijection de A sur B si pour tout y de B , il existe un unique x de A tel que $f(x) = y$.**
(tout élément de B admet un unique antécédent dans A)
La fonction qui a y de B associe son unique antécédent x de A est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}. $\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Théorème (admis) : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $J = f(I)$. La bijection réciproque f^{-1} est aussi continue sur J et est monotone et de même sens de variation que f .
Les courbes C_f et C_f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.