Compte rendu de la séance n$^{\text{o}}$ 4

Le sujet principal de notre séance n° 4 était les espaces vectoriels normés de dimension finie. Une nouvelle fois cette séance a été l'occasion de beaucoup de questions, c'est le signe d'une bonne émulation et je vous en remercie !
Tout d'abord je voudrais bien préciser un des points qui nous restait à montrer :

Propriété 1 *Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{H}_n^+$ alors $tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$*

Pour la preuve, procéder comme suit :

1. Remarquer que pour A hermitienne, $a_{i,j} = \langle Ae_j, e_i \rangle$ où (e_i) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et remarquer le signe des éléments diagonaux.
2. Montrer le résultat pour le cas particulier où A est diagonale hermitienne positive.
3. Dans le cas général écrire que $A = UDU^*$ et $AB = UDU^*B = U(DU^*BU)U^*$ et se servir du point précédent. □

J'ai appliqué ce résultat pour montrer que la norme de Schur était sous-multiplicative.
On pouvait se passer de la propriété 1 pour cela, il suffisait de poser $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$ et d'appliquer Cauchy-Schwartz. J'ai tourné en rond sans trouver la fin de la démonstration. C'était en fait simple, voici l'argument :

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 = \langle AB, AB \rangle = \mathrm{tr}((AB)^*AB) = \mathrm{tr}(B^*A^*AB) = \mathrm{tr}(A^*ABB^*) &= \mathrm{tr}((A^*A)^*BB^*) \\ &= \langle A^*A, BB^* \rangle \\ &\leq \|A^*A\|.\|B^*B\| \end{aligned}$$

Mais à partir de là, il reste à montrer que pour pour tout A, $\boxed{\|A\|^2 = \|A^*A\|}$.
Pour cela on fait un raisonnement valable pour toute norme hermitienne : On pose $f(x, y) = \langle A^*Ay, x \rangle$. f est bilinéaire et d'après l'exercice 3 de la feuille n^o 4 on sait que $\|f\| = \|A^*A\|$. Or $f(x, y) = \langle Ax, Ay \rangle$ donc d'après Cauchy-Schwartz $\|f(x, y)\| \leq \|Ax\|.\|Ay\| \leq \|A\|^2.\|x\|.\|y\|$. Donc $\|A^*A\| \leq \|A\|^2$. Puis il suffit de prendre x tel que $\|Ax\| = \|A\|$ (on est en dimension finie) et alors $f(x, x) = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = \|A\|^2$, donc la norme est atteinte.

Pour le reste voici quelques éléments de réponses aux questions posées :

- ➢ Tout d'abord une remarque culturelle : j'ai parlé de **corps valué complet**, valué voulant dire "muni d'une valeur absolue", ce qui muni le corps d'une topologie.
  D'où la question légitime : existe t-il d'autres corps complets que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$? L'exemple classique semble être **les corps $p-$adique**.
  Je vous renvoie à ce lien qui donne une idée de la construction de ces corps.
- ➢ Clothilde a posé la question de savoir pourquoi le fait que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ était complet était si important pour montrer qu'une fonction continue sur un compact, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est bornée et atteint ses bornes.
  La démonstration de cette propriété utilise la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ qui elle-même utilise la propriété de la borne supérieure (toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure) qui elle-même utilise de façon cruciale la complétude de $\mathbb{R}$. Elle est d'ailleurs fausse dans $\mathbb{Q}$ comme le montre l'exemple de $\{x \in \mathbb{Q} / \, x < \sqrt{2}\}$ qui n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour résumer on a la suite d'implication :
  Construction de $\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}$ est complet $\Longrightarrow \mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure et donc de la borne inférieure $\Longrightarrow$ Bolzanno-Weirstrass $\Longrightarrow$ Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les

fermés et bornés.
Puis
$f : C \to \mathbb{R}$ continue sur un compact $C \Longrightarrow f(C)$ est un compact de $\mathbb{R} \Longrightarrow f(C)$ est un fermé borné de $\mathbb{R} \Longrightarrow f$ est bornée sur C et y atteint ses bornes.

➢ Une autre question en fin de séance a été posée par Jéremy sur le théorème d'Auerbach. Il me demandait si la démonstration suivante était juste :
- $|e_i^*(e_i)| = 1$ donc $\|e_i^*\| \geq 1$: VRAIE à condition que $\|e_i\| = 1$
- $|e_i^*(x)| = |e_i^*(\sum_i x_i e_i)| = |x_i| \leq \|x\|$ donc $\|e_i^*\| \leq 1$: FAUX
  L'inégalité $|x_i| \leq \|x\|$ n'est vraie que pour certaines normes, en particulier pour toutes les normes euclidiennes telles que $(e_i)_i$ est orthonormée (voir la propriété 2) .

  Mais si on prend $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ il suffit de prendre $P = 1-2X$. Alors $\|P\| = 1$ mais la deuxième coordonnée $x_2 = -2$ ne vérifie pas $|x_2| \leq \|x\|$

Définition 2
On dit que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base d'Auerbach si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée telle que $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ est normée.

On a alors la propriété suivante qui caractérise les bases d'Auerbach d'un espace euclidien (ou hermitien), c'est à dire dont la norme dérive d'un produit scalaire :

Propriété 3 *Si E est un espace euclidien de dimension n alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthornormée de E.
(2) $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base d'Auerbach.

Preuve : En exercice.

Pour (1) $\Rightarrow$ (2) : remarquer que $e_i^* = \langle e_i, .\rangle$
Pour (2) $\Rightarrow$ (1) :
- Montrer que $\|x_1e_1 + x_2e_2\| \geq \max(|x_1|, |x_2|)$
- Pour ε "petit" évaluer $\|e_1 + \varepsilon e_2\|$ et montrer que $|\mathrm{Re}(\langle e_1, e_2\rangle)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- Travailler avec $i\varepsilon$ de la même manière et montrer que $|\mathrm{Im}(\langle e_1, e_2\rangle)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- En déduire que e_1 et e_2 sont orthogonaux.