Propriété 1 Si (u_n) est une suite positive et ϕ une bijection $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}$$

Démonstration :

1. $\sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}$ converge car si $n \in \mathbb{N}$, il existe un N tel que $\{\phi(0), ..., \phi(n)\} \subset \{0, ..., N\}$ d'où :

$$\sum_{i=0}^{n} u_{\phi(i)} \leq \sum_{i=0}^{N} u_i \leq S$$

   (En notant $S = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$) On en déduit que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}$ est majorée à terme positif donc converge.

2. On note $S' = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}$. Montrons que $S = S'$:
   On sait déjà que $S' \leq S$. Mais en utilisant le point 1 au couple $(u_{\phi(n)})$,ϕ^{-1} on obtient que :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi^{-1}(\phi(i))} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}$$

   c'est à dire que $S \leq S'$.

Propriété 2 Si (u_n) est une suite telle que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ est absolument convergente et ϕ une bijection $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}$$

Démonstration D'après la propriété 1, $\sum_{i=1}^{+\infty} u_{\phi(i)}$ converge absolument donc converge. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose : $x^+ = x$ si $x \geq 0$ et $x^+ = 0$ sinon.
De même, on pose $x^- = x$ si $x \leq 0$ et $x^- = 0$ sinon.
Ainsi : $|u_n^+| \leq |u_n|$ donc la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^+$ converge.
De même $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^-$ converge.
On applique la propriété 1 à ces séries :$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^+ = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}^+$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^- = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\phi(i)}^-$ puis en sommant et en remarquant que $x = x^+ + x^-$, on obtient le résultat.

Un exemple concrêt de tribu On considère le lancer de deux pièces indiscernables. Le bon ensemble pour modéliser est l'ensemble $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. La tribu "‘naturelle"’ des évènements sera :

$$\{\emptyset; \{PP\}; \{FF\}; \{PP, FF\}; \{PF, FP\}; \{PP, FP, PF\}; \{FF, FP, PF\}\}$$