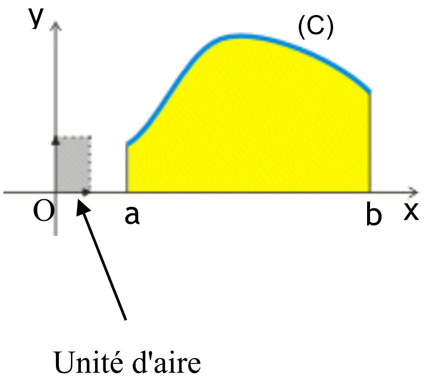
Calcul intégral

I] Aire et intégrale

1) **Définition 1:** A toute fonction f positive ou nulle (en abrégé **positive**) définie sur un intervalle [a ; b] avec a<b , de courbe représentative C dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on associe l'ensemble A_f des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$, c'est à dire la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations x = a et x = b.



Définition 2 : Pour toute **fonction f positive et continue** sur [a ; b] avec a < b , on appelle **intégrale de f sur [a ; b]** et l'on note $\int_a^b f(x)\, dx$, l'aire de A_f.

Remarques

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- si f est négative sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'opposé de l'aire de A_f .

$$A_f = -\int_a^b f(x)\,dx$$

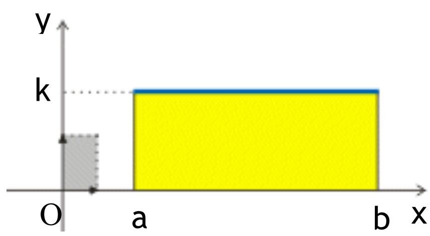
- $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(x)$ dx".
- La variable x est appelée variable "muette".

  On peut remplacer x par n'importe quel autre variable : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$.
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$: Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe Ox et 3 cm sur l'axe Oy, alors l'unité d'aire est 6 cm^2.

Exemple

Si f est une fonction constante positive k, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ correspond à l'aire d'un rectangle,

On a $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$.



Exercice 1 : Calculer $\int_{-2}^{1} 5\,dx$ et $\int_{1}^{3} 2x\,dx$

2) **Propriétés de l'intégrale** :

a) Toute fonction continue sur [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.

b) **Relation de Chasles** Soit une fonction, f, continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a, b et c de I, on a $\int_a^b f(x)dx : = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

c) $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$

d) **Linéarité**: Soit deux fonctions, f et g, continues sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I, on a : $\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ où α et β sont des réels.

e) **Positivité de l'intégrale** : Soit une fonction f continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que **a ≤ b**. Si $f \geq 0$ sur [a ; b], alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

f) **Respect de l'ordre par intégration**. Soient deux fonctions, f et g, continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que **a ≤ b**. Si $f \leq g$ sur I, alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

g) **Inégalité de la moyenne :** Sur un intervalle [a, b] avec a < b, la fonction est comprise entre m et M; on a **m ≤ f(x) ≤ M**

On intègre, on a alors $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$,

C'est-à-dire : m(b - a) ≤ $\int_a^b f(x)dx$ ≤ M(b - a)

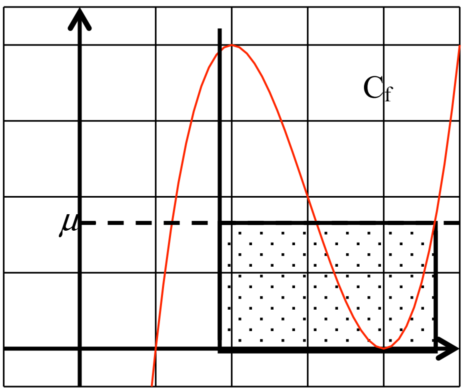
h) **Définition : Soit f une fonction *continue et positive* sur [a ; b].**

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation graphique :

Puisque $\int_a^b \mu\,dx = \mu(b-a)$, on a donc $\int_a^b \mu\,dx = \int_a^b f(x)dx$.

Ainsi, l'aire du domaine associé à une fonction f sur [a ; b] est égale à celle du rectangle de dimensions μ et b – a.



Interprétation cinématique :

La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de la vitesse . En effet, avec la notation donnée, on a :

$$\textit{vitesse moyenne} = \frac{\textit{distance parcourue}}{\textit{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \textit{valeur moyenne de la vitesse.}$$

II] Primitives d'une fonction

1) <u>Définition</u> :Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est **une primitive** de f lorsque **la dérivée** de F sur I est f. **F ' = *f***

<u>Exercice 2</u> : Recherche des primitives des fonctions usuelles.

2) **<u>Théorème 1</u>:** (admis) Toute **fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I**

3) **<u>Théorème 2</u>** : Les primitives de f sur un intervalle diffèrent entre elles d'une constante ; les primitives de f sont de la forme F + k (où k est une constante).

Exemple (vocabulaire important) :

Déterminer **une** primitive sur IR de $f(x) = x^3 - 2x + 3$: $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x$

Déterminer **les** primitives sur IR de $f(x) = x^3 - 2x + 3$; $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + k$ ($k \in$ IR)

Déterminer **la** primitive sur IR de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ telle que F(0) = 1 ;

$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + k$ et $F(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$ d'où $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + 1$.

Remarque 1 : L'hypothèse **I est un intervalle (ou sur un intervalle [*a* ; *b*])** est fondamentale. En effet,

soient les fonctions F et G définies sur IR* par $F(x) = \frac{1}{x}$ et $\begin{cases} G(x) = \frac{1}{x} + 1 \ si \ x > 0 \\ G(x) = \frac{1}{x} - 1 \ si \ x < 0 \end{cases}$

Sur chacun des intervalles]-∞ ; 0[et]0 ; + ∞[, F et G ont la même fonction dérivée $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ mais il n'existe pas de constante K telle que, pour tout x de IR*,on ait $G(x) = F(x) + K$.

Remarques 2 : La primitive d'une somme est la somme des primitives.

La primitive d'un produit d'une constante par une fonction est le produit de cette constante par la primitive de la fonction.

<u>Exercice 3</u> : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.Déterminer les réels a, b et c tels que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f.

4) **<u>Théorème</u>** : Soit une fonction f continue sur un intervalle I et a un élément de I. L'**unique primitive de *f* sur I prenant la valeur 0 en *a*** est la fonction F définie par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

5) **<u>Propriété :</u>** Si F est une primitive quelconque de f continue sur I, a et b étant des réels quelconques de I alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

<u>Exercice 4</u> : Calculer $\int_1^2 3x + 2\,dx$ et $\int_1^3 xe^{x^2}\,dx$

6) **<u>Intégration par partie :</u>** **(ROC)** Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u ' et v ' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx$$

<u>Exercice 5</u> : Calculer $\int_1^e ln(x)\,dx$; $\int_1^3 xe^x\,dx$ et $\int_0^\pi x^2 cos(x)\,dx$ (parfois 2 intégrations par partie sont nécessaires).

Remarque:

La formule de dérivation par parties est basée sur la propriété des dérivées : [u v]' = u'v + uv'

Elle pourra être retenue de façon abrégée sous la forme $\int u'v = [u\,v] - \int uv'$ ou $\int uv' = [u\,v] - \int u'v$

Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être <u>plus simple</u> que la première. Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de u et v'.

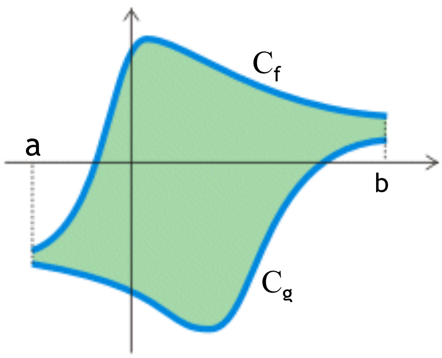
On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.

<u>ATTENTION</u> : 1 **primitive** → c'est une **fonction**

1 **intégrale** → c'est un **nombre** (positif, négatif ou nul) calculé à partir d'une primitive

III] Application du calcul intégral

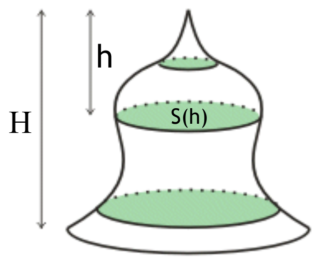
1) **<u>Calcul d'aires de surfaces planes</u>** :



Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle [a ; b] (a < b) telles que, pour tout $x \in$ [a ; b] : $g(x) < f(x)$.
L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de *f* et de *g* et les droites d'équation x = a et x = b, c'est-à-dire l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant
$\{ a \le x \le b ; g(x) \le y \le f(x) \}$

est donnée en unités d'aires par $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

2) **<u>Calcul de certains volumes:</u>**



Pour un volume V de hauteur H dont la section avec un plan à la hauteur h a pour aire *S(h)*, on a :

$$V = \int_0^H S(h)\,dh \quad \text{unités de volume.}$$

Cas particulier : Soit C un arc de la courbe d'équation $y = f(x)$ avec $f(x) \ge 0$ sur [a ;b]. Par rotation autour de l'axe (xx'), cette courbe engendre une surface de révolution d'axe (*xx'*).Cette surface délimite un solide de révolution. La section de ce solide par un plan perpendiculaire à (*xx'*) est un disque d'aire $\pi\left(f(x)\right)^2$. Son volume est donné par $\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

<u>Exercice 6</u> : (C) est la courbe de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur [0 ; π].

a) Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe et l'axe (*xx'*).
b) Calculer le volume engendré par la rotation de cette courbe autour de l'axe (*xx'*).