Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie session 2012 - groupement B

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 2x - e^{-2x}, \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 0 \qquad \text{(E')}$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - \frac{1}{2} - xe^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Partie B Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. **a.** Vérifier que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(e^{-2x} - 1\right),$$

puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 2x - 1$	$y = x - \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2} - x$

2. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \longmapsto e^t$, déterminer le développement à l'ordre 2, au voisinage de 0 de ma fonction : $x \longmapsto e^{-2x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Les questions 2c et 2d sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

c. Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = -x+3x^2$	$y = 3x^2$	$y = -x$

d. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}$ est :

au dessus de la tangente $\mathcal{T}$	en dessous de la tangente $\mathcal{T}$	en dessous de la tangente $\mathcal{T}$ quand $x < 0$ et au dessus quand $x > 0$.

Partie C Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-x+3x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $I = \dfrac{1}{4}$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $J = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{4}$.

3. **a.** On note $K = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie B.

   Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

   b. Donner la valeur approchée de $K - I$ arrondie à 10^{-4}.

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Un sous-traitant automobile fabrique des charnières de capot.

Dans cet exercice, les résultats seront à arrondir à 10^{-2} .

Partie A Loi binomiale

On considère un stock important de charnières en attente de perçage. On note E l'évènement : « une charnière prélevée au hasard dans ce stock est défectueuse ». On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 100 charnières dans ce stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable X, qui a chaque prélèvement de 100 charnières, associe le nombre de celles qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(x \geqslant 2)$.

Partie B Loi de Poisson

On considère la perceuse n° 1 de cet atelier. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout instant, associe le nombre de charnière en attente devant cette perceuse.
On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. On suppose dans cette question que l'atelier dispose de deux perceuses. Dans ce cas, le paramètre λ de la loi de la variable aléatoire Y vaut $\lambda = 6$.

   a. Déterminer $P(Y = 8)$.

   b. Déterminer $P(Y > 7)$.

2. Soit S l'évènement : « il y a plus de 7 charnières en attente devant la perceuse n° 1 ».

Lorsque l'atelier dispose de 3 perceuses, le paramètre λ de la loi de la variable aléatoire Y vaut $\lambda = 4$.

Lorsque l'atelier dispose de 4 perceuses, le paramètre λ de la loi de la variable aléatoire Y vaut $\lambda = 3$.

Quel est le nombre minimal de perceuses pour que la probabilité S soit inférieure à $0,1$?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

Partie C Loi normale

On considère la production de charnières dans cette journée.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque charnière prélevée au hasard dans cette production, associe le diamètre du trou exprimé en millimètres. On admet que Z suit une loi normale de moyenne $6,2$ et d'écart-type $0,08$.
Calculer $P(Z \leqslant 6)$, dans ce cas le perçage sera à refaire.

Partie D Intervalle de confiance

Avant d'expédier un lot de charnières au constructeur, on se propose d'en estimer la moyenne des diamètres de perçage.
On prélève un échantillon au hasard et avec remise de 100 charnières dans ce lot.
Soit $\bar{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 charnières ainsi prélevé, associe la moyenne des diamètres de perçage, exprimés en millimètres. On suppose que $\bar{M}$ suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\frac{0,08}{\sqrt{100}}$.
Pour l'échantillon prélevé la moyenne obtenue des diamètres de perçage est
$\overline{x} = 6,04$.

1. Déterminer un intervalle de confiance, centré en $\overline{x}$, de la moyenne μ des diamètres de perçage de ce lot avec le coefficient de confiance de 95 %.

2. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 1 ».

Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication.)