Brevet de technicien supérieur
novembre 2012 - groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **10 points**

Une entreprise fabrique des appareils électroniques en grande série. En vue d'améliorer sa production, eUe effectue une étude. La partie A de cet exercice s'intéresse à la phase de fabrication de ce produit ; la partie B, au temps de bon fonctionnement d'un produit ne présentant pas de défaut de fonctionnement en fin de fabrication.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie A

Un composant électronique entrant dans la fabrication de ce type d'appareil peut se révéler défectueux et induire un défaut de fonctionnement de cet appareil.
On prélève 50 appareils dans la production d'un jour donné. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note E l'évènement : « Un appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On admet que $P(E) = 0,016$.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 appareils, associe le nombre d'appareils présentant un défaut de fonctionnement.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il n'y ait aucun appareil présentant un défaut de fonctionnement.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux appareils présentant un défaut de fonctionnement.

Partie B

Le but de cette partie est de trouver une solution particulière, notée F, de l'équation différentielle (E) suivante :

$$10^4 y' + 4y = 4.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre

$$10^4 y' + 4y = 0.$$

2. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel t, par $h(t) = 1$ est solution de l'équation différentielle (E).
3. Exprimer les solutions de l'équation différentielle (E).
4. En déduire la solution particulière F telle que $F(0) = 0$.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse aux appareils ne présentant pas de défaut en fin de fabrication et à leur durée de bon fonctionnement. On considère cette durée, exprimée en heures, comme une variable aléatoire T prenant des valeurs positives ou nulles.
On admet que pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0,0004t}.$$

1. **a.** Calculer la probabilité

$$P(T \leqslant 600).$$

b. En déduire la probabilité qu'un appareil fonctionne encore après 600 heures d'utilisation.

2. **a.** Déterminer le plus grand nombre entier t_0 tel que

$$P(T > t_0) \geqslant 0,95.$$

b. L'emballage de cet appareil porte la mention « durée de fonctionnement supérieure à 100 heures ». Pour un appareil choisi au hasard, la probabilité que cette mention soit fausse est-elle inférieure à 0,05 ?

3. On admet que la moyenne de temps de bon fonctionnement d'un appareil électronique est définie par :

$$E(T) = 0{,}0004 \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-0{,}0004t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose :

$$I(\alpha) = 0{,}0004 \int_0^{\alpha} t\mathrm{e}^{-0{,}0004\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

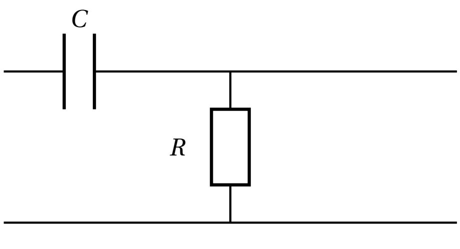
$$I(\alpha) = -\alpha\mathrm{e}^{-0{,}0004\alpha} - \frac{1}{0{,}0004}\mathrm{e}^{-0{,}0004\alpha} + \frac{1}{0{,}0004}.$$

b. Donner la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

c. En déduire la valeur de $E(T)$ exprimée en heures.

Exercice 2 **10 points**

Dans cet exercice, on étudie un filtre passe haut dont le schéma est représenté ci-dessous.



R, C et ω désignent des nombres réels strictement positifs.
La transmitance isochrone de ce filtre a pour expression $T(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{RC\omega}{R + \frac{1}{C\omega\mathrm{j}}}$ où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A

1. **a.** Montrer que

$$T(\mathrm{j}w) = \frac{RC\omega}{RC\omega - \mathrm{j}}.$$

b. On pose $x = RC\omega$.

Montrer que le module du nombre complexe $T(\text{j}w)$ est :

$$|T(\text{j}w)| = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. Le gain en puissance, G_{db} exprimé en décibels (db) est défini par la relation

$$G_{\text{db}}(x) = 20\log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

où log désigne la fonction logarithme décimal.

La courbe représentative de la fonction G_{db} est donnée à l'annexe 1.

La fréquence de coupure du circuit est la fréquence pour laquelle le gain en puissance est égal à -3 db.

a. En utilisant la courbe de l'annexe 1, déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle le gain est égal à -3 db.

b. On rappelle que la fréquence f vérifie la relation $\omega = 2\pi f$. À l'aide de la valeur de x trouvée précédemment, exprimer la fréquence de coupure en fonction de R et C.

3. On pose $h(x) = \dfrac{x}{x-\text{j}}$ pour tout nombre réel x strictement positif.

a. On admet que l'ensemble des points M d'affixe $h(x)$ lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels strictement positifs, est le demi-cercle C de diamètre [OA] représenté sur le document réponse 1.

Le nombre complexe $h\left(\sqrt{3}\right)$ est l'affixe d'un point M_0 du demi-cercle C.

Calculer le nombre complexe $h\left(\sqrt{3}\right)$, puis placer sur le document réponse 1 le point M_0.

b. Sur le demi-cercle C, on a placé le point M_1.

Déterminer la valeur du nombre réel x pour lequel le nombre complexe $h(x)$ est l'affixe du point M_1.

Partie B

Pour la suite, on suppose que $R = 200$ ohms et $C = 0{,}01$ farads.

Le signal d'entrée du circuit est une tension e et le signal de sortie est une tension s.

Les fonctions e et s sont des fonctions causales, c'est-à-dire que pour tout nombre réel t strictement négatif on a $e(t) = s(t) = 0$.

Les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace respectives E et S vérifiant :

$$S(p) = H(p) \times E(p) \quad \text{où} \quad H(p) = \frac{2p}{2p+1}.$$

1. On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ pour tout nombre réel t strictement négatif et par $\mathcal{U}(t) = 1$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

Le signal d'entrée e est tel que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1).$$

Déterminer la transformée de Laplace $E(p)$ de la fonction e.

2. Prouver que $S(p) = \dfrac{1}{p+0{,}5} - \dfrac{\text{e}^{-p}}{p+0{,}5}$.

3. **a.** En déduire $s(t)$ pour tout réel t.

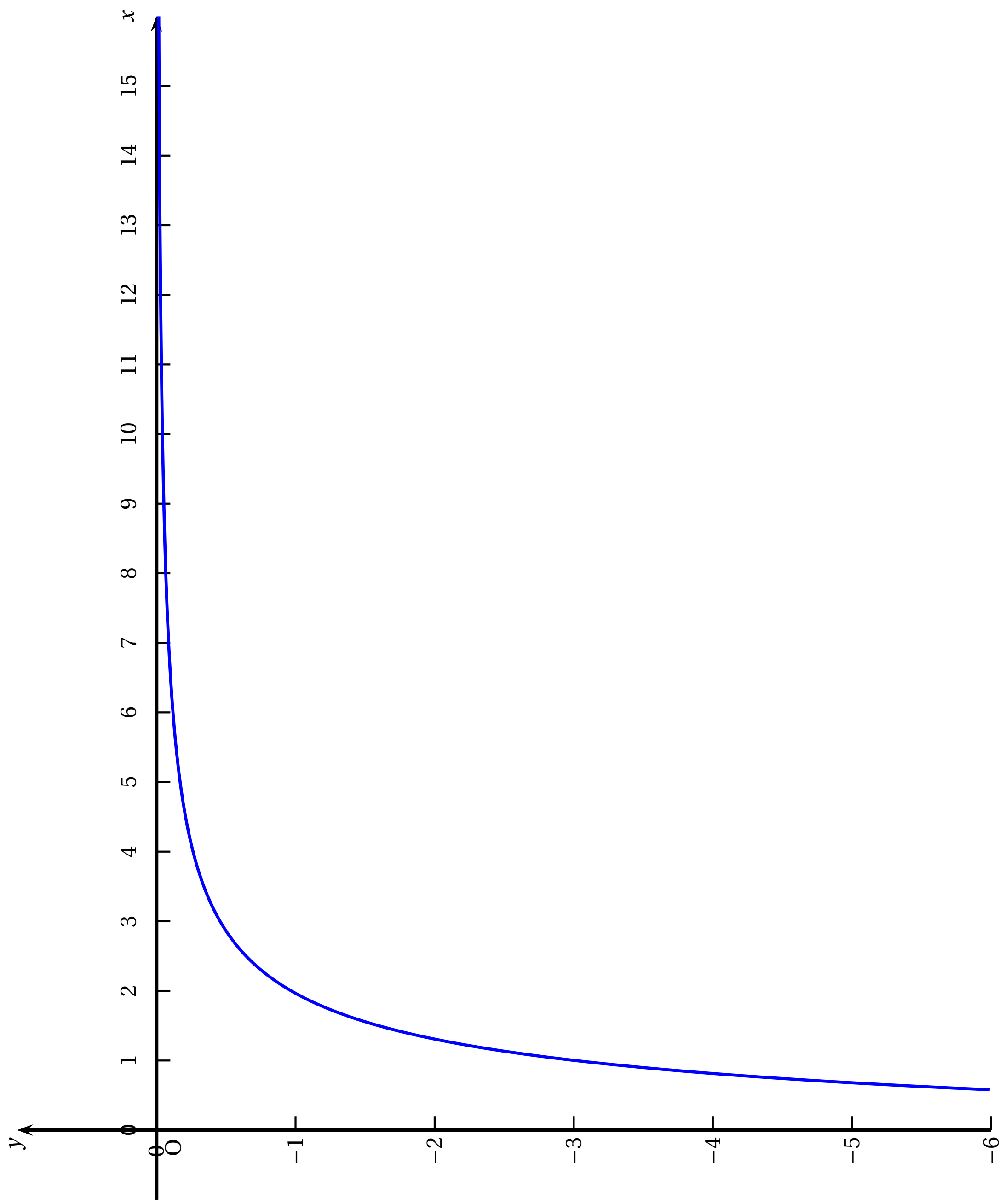
b. Donner une expression simplifiée de $s(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1[$.

Cette expression est-elle en concordance avec le graphique du document réponse 2 ?

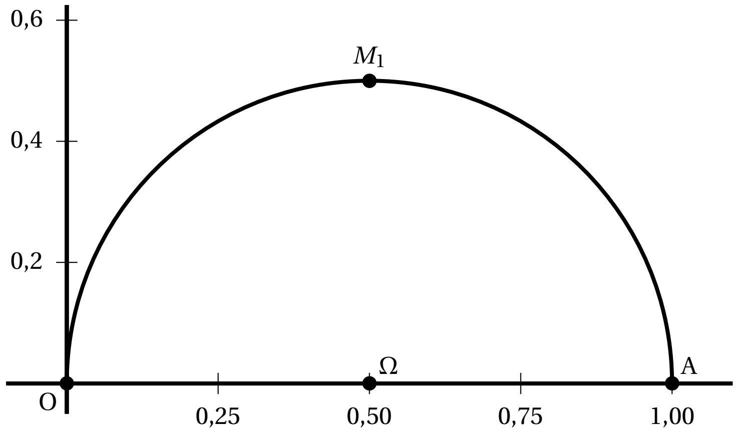
c. Vérifier que $s(t) = \left(1 - \text{e}^{0,5}\right)\text{e}^{-0,5t}$ pour tout réel t supérieur ou égal à 1.

d. Compléter le graphe de la fonction s sur le document réponse 2, pour t appartenant à l'intervalle $[1\,;\,3]$.

Annexe 1



Document réponse 1



Document réponse 2