Problème (11 points)

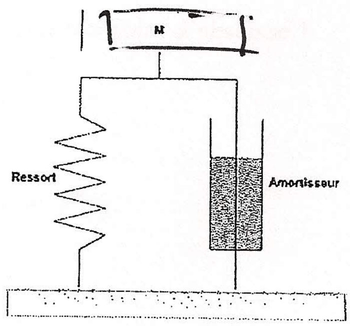
Une suspension, sur laquelle est placée une charge de masse M, est composée d'un ressort vertical et, éventuellement, d'un amortisseur (schématisés ci-contre).

Pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on désigne par $y(t)$ l'amplitude du ressort à l'instant t.

On démontre en mécanique que l'amplitude y du ressort, qui est une fonction supposée deux fois dérivable, est solution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y''+c\,y'+4y=d,$$

où c et d sont des constantes liées au système.



Partie A – Système sans amortissement

On suppose, dans *cette partie uniquement*, que $c=0$ et $d=0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E), qui s'écrit alors $y''+4y=0$.

2. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les égalités :
$$y(0)=1 \quad \text{et} \quad y'(0)=-1.$$

Partie B – Système amorti

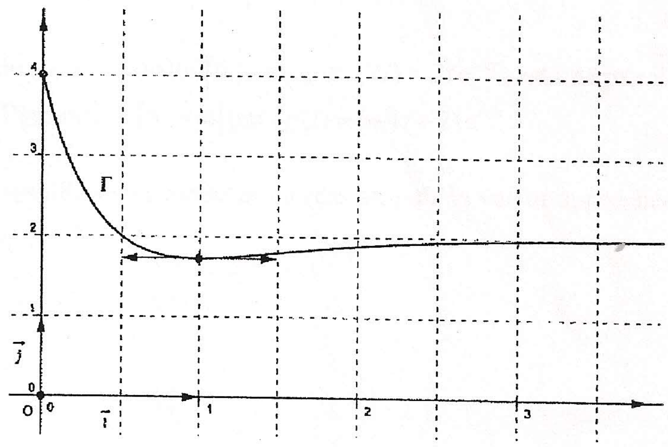
On suppose maintenant, après avoir modifié les paramètres du système, que l'on a : $c=4$ et $d=8$.
On admet qu'une solution particulière de l'équation différentielle (E) est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=(At+B)\mathrm{e}^{-2t}+2,$$

où A et B sont deux constantes réelles que l'on va déterminer.

1. Détermination des constantes A et B

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique Γ de la fonction f.



On précise que :

- la courbe Γ passe par le point de coordonnées (0 ; 4) ;
- la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en son point d'abscisse 1.

a) Déterminer à partir de ces renseignements la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de la constante B.

b) Exprimer $f'(t)$ en fonction de A et de B.

c) À partir des renseignements précédents, déterminer la valeur de $f'(1)$.
En déduire la valeur de la constante A.

2. Étude de la fonction f

On admet désormais que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$f(t)=(-4t+2)\mathrm{e}^{-2t}+2.$$

a) En remarquant que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(t)=-4t\,\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-2t}+2$, déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
En déduire l'existence d'une asymptote à Γ dont on précisera une équation.

b) Vérifier que la fonction dérivée f' de la fonction f s'exprime, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par : $f'(t)=8(t-1)\mathrm{e}^{-2t}$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variation sur ce même intervalle.

d) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe Γ au point d'abscisse 0.

3. Un calcul d'intégrale

Afin de mesurer les sollicitations de cet amortisseur, l'une des données à recueillir est l'amplitude moyenne du ressort sur l'intervalle $[0;10]$ donnée par la relation :

$$\mu=\frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $G(t)=2t\,\mathrm{e}^{-2t}$, est une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $g(t)=(-4t+2)\mathrm{e}^{-2t}$.

b) En déduire la valeur exacte de l'amplitude moyenne μ du ressort, puis la valeur approchée arrondie à l'entier le plus proche.