Une deuxième introduction à la dérivation

Problématiques développées : P2, P3 et P7.
Série : toutes séries (expérimenté en première S).
Place dans la progression : avant le cours sur la dérivation.

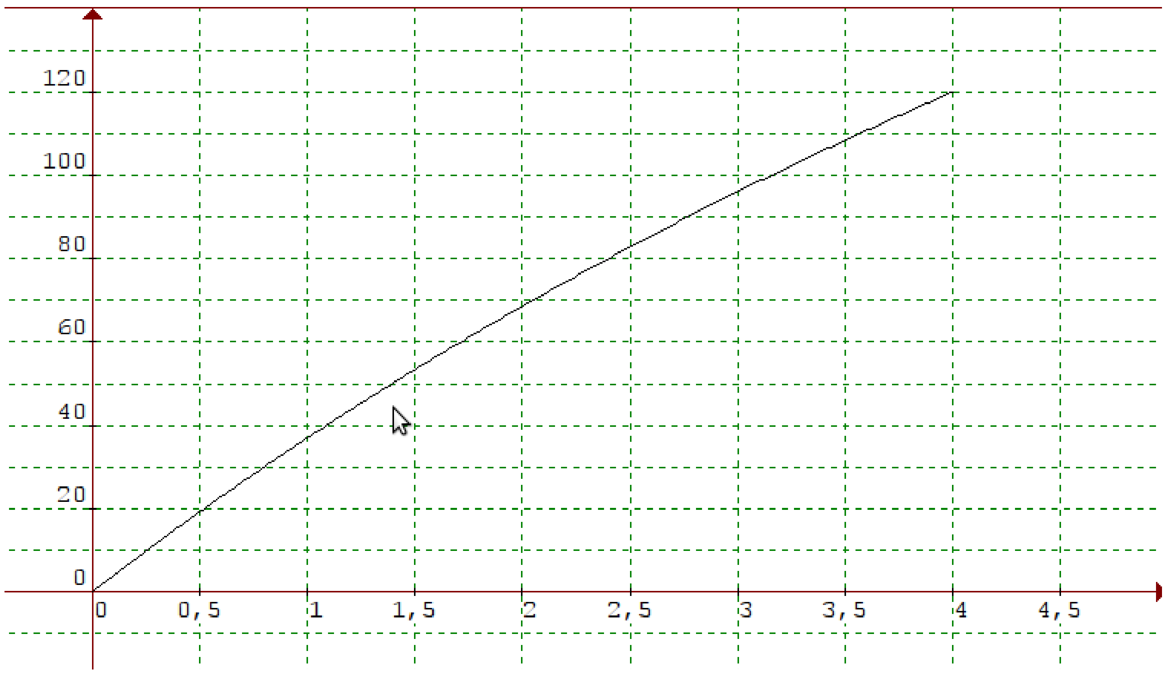
Objectifs pédagogiques	Introduire un nouvel outil, lui donner du sens et montrer son intérêt.
Compétences	Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Mener des raisonnements. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Les fonctions. Les droites.
Logiciels	Logiciel de calcul formel.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel et collectif.

Activité : « le radar »

Après un séjour passé en Allemagne, un célèbre professeur de mathématiques emprunte la voie express sans limitation de vitesse. Lors du passage de la frontière pour regagner la France, il réalise que la limitation de vitesse est de 130km/h. Il décide donc de freiner son véhicule afin d'éviter une éventuelle contravention! Il stabilise sa vitesse au bout de 4 secondes.

À partir du franchissement de la frontière par le véhicule, on note t le temps écoulé en seconde et $f(t)$ la distance parcourue en mètres.

Sur l'intervalle [0 ; 4], la fonction f est définie par $f(t) = \dfrac{480t}{t+12}$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 4].



Partie A: Étude du mouvement

1. Calculer $\dfrac{f(3)-f(0{,}5)}{2{,}5}$ puis donner une interprétation du résultat.
2. Exprimer, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, $V(h)=\dfrac{f(0{,}5+h)-f(0{,}5)}{h}$ en fonction de h puis donner une interprétation du résultat.
3. À l'aide de la calculatrice, observer les valeurs de $V(h)$ pour h variant de 0,1 à 0,5 avec un pas de 0,1.
   Faire ensuite varier h de 0,01 à 0,1 avec un pas de 0,01.
   Faire enfin varier h de 0,001 à 0,01 avec un pas de 0,001.
   Lorsque h est proche de 0, que devient $V(h)$?

   Le résultat obtenu s'appelle la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0. En terme concret, cette valeur correspond à la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 0{,}5$.
4. Le célèbre professeur de mathématiques aperçoit les gendarmes avec leur radar à l'instant $t = 0{,}5$. En tenant compte des vitesses retenues par le cinémomètre (voir tableau ci-dessous), est-il en infraction lorsqu'il est surpris par les gendarmes? Justifier votre réponse.

VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre		VITESSE ENREGISTRÉE	VITESSE RETENUE Cinémomètre	
	Fixe	Mobile		Fixe	Mobile		Fixe	Mobile
55	50	—	86	81	76	117	111	105
56	51	—	87	82	77	118	112	106
57	52	—	88	83	78	119	113	107
58	53	—	89	84	79	120	114	108
59	54	—	90	85	80	121	114	108
60	55	50	91	86	81	122	115	109
61	56	51	92	87	82	123	116	110
62	57	52	93	88	83	124	117	111
63	58	53	94	89	84	125	118	112
64	59	54	95	90	85	126	119	113
65	60	55	96	91	86	127	120	114
66	61	56	97	92	87	128	121	115
67	62	57	98	93	88	129	122	116
68	63	58	99	94	89	130	123	117
69	64	59	100	95	90	131	124	117
70	65	60	101	95	90	132	125	118
71	66	61	102	96	91	133	126	119
72	67	62	103	97	92	134	127	120
73	68	63	104	98	93	135	128	121
74	69	64	105	99	94	136	129	122
75	70	65	106	100	95	137	130	123
76	71	66	107	101	96	138	131	124
77	72	67	108	102	97	139	132	125
78	73	68	109	103	98	140	133	126
79	74	69	110	104	99	141	133	126
80	75	70	111	105	99	142	134	127
81	76	71	112	106	100	143	135	128
82	77	72	113	107	101	144	136	129
83	78	73	114	108	102	145	137	130
84	79	74	115	109	103	146	138	131
85	80	75	116	110	104	147	139	132

La première colonne donne la vitesse enregistrée par le cinémomètre. Afin de tenir compte des erreurs de mesure, cette vitesse enregistrée est transformée en une vitesse retenue, qui est celle utilisée pour constater une infraction.

Lorsque le cinémomètre est fixe, la deuxième colonne du tableau donne la vitesse retenue ; lorsque l'appareil est embarqué à l'intérieur d'une voiture de gendarmerie et que la mesure se fait en roulant, c'est la troisième colonne du tableau qui donne la vitesse retenue.

Partie B : Par le calcul formel

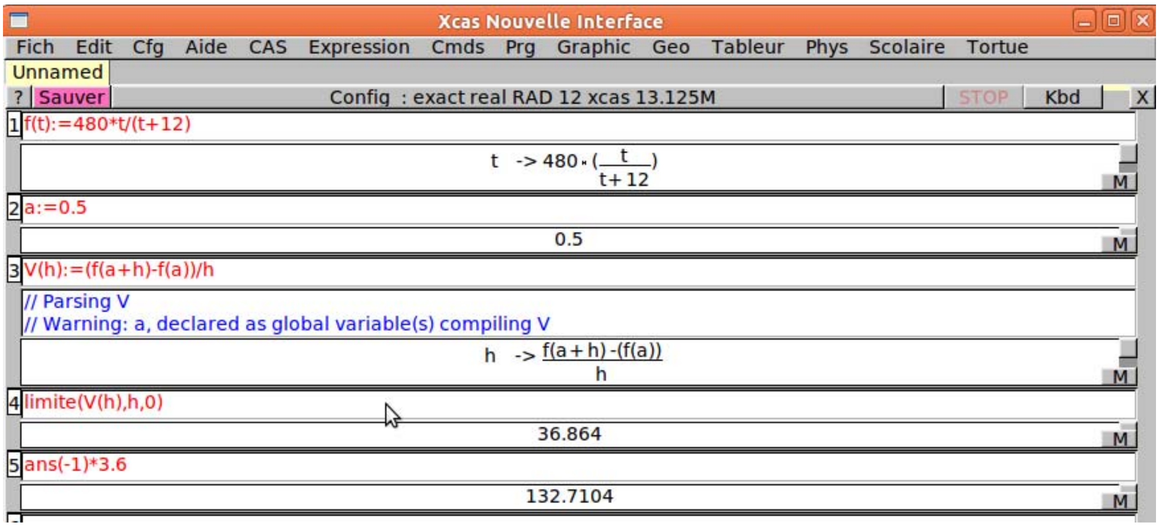
Émettre une conjecture quant à l'instant t, compris entre 0 et 4, à partir duquel la vitesse du célèbre professeur de mathématiques restera inférieure à 110km/h (on demande une valeur arrondie de t à la seconde près).

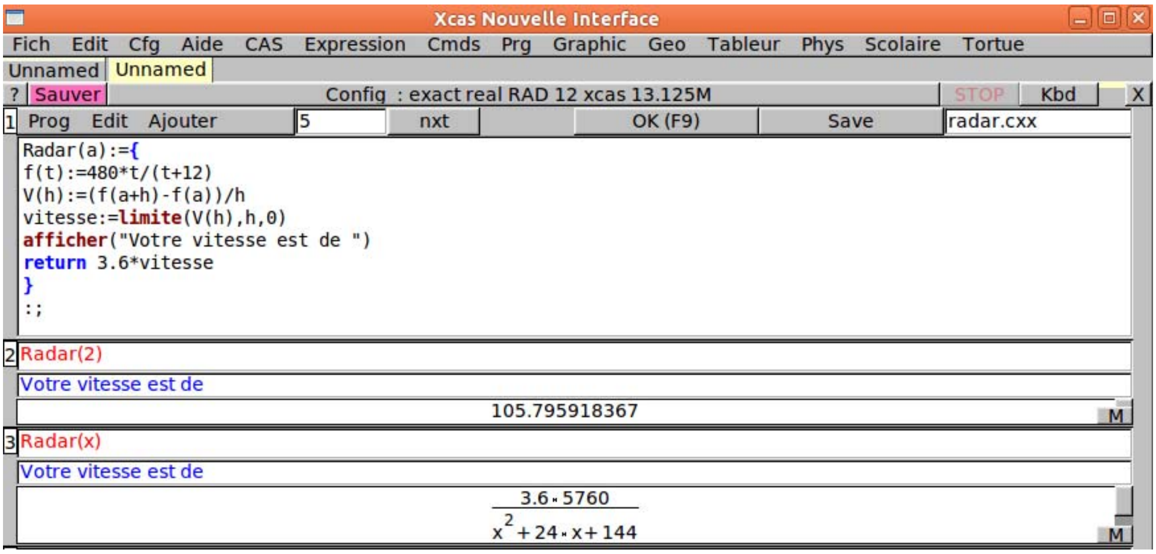
Aide : pour le logiciel de calcul formel *Xcas*, la commande qui permet de calculer la limite de $V(h)$ quand h tend vers 0 est limite($V(h)$,h,0).

Partie C : Par l'algorithmique

5. Écrire un algorithme permettant de calculer la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques à un instant a compris entre 0 et 4.
6. Écrire cet algorithme en langage Xcas puis exécuter ce programme pour différentes valeurs de a, comprises entre 0 et 4.
7. À l'aide du programme, déterminer en fonction de l'instant x, la vitesse instantanée du célèbre professeur de mathématiques.

Éléments de réponse





3. Pourcentages

Job de vacances

Cette activité a pour but :

- d'entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d'amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1, P2, P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l'information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

Scénario pédagogique

Étape 1 : le professeur laisse travailler les élèves en autonomie sur le support donné sur la page suivante. Il passe dans les rangs aider ou débloquer certains élèves en difficulté. Une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.

Aurélie, une jeune fille de 16 ans, a trouvé un premier emploi de vacances en tant qu'animatrice dans le centre de vacances « Les alouettes ». Elle doit effectuer 109 heures de travail pour un salaire net de 647 euros auquel s'ajoutent 79 euros d'indemnités de congés payés.

En se renseignant sur la législation en vigueur concernant les salaires et indemnités de congés payés, elle a trouvé les informations suivantes :

Salaire et indemnité de congés payés (Circulaire DRT n° 2002-15 du 22 août 2002)

Le salaire minimum de croissance (SMIC) est le salaire horaire en dessous duquel il est interdit de rémunérer un salarié et ce, quelle que soit la forme de sa rémunération (au temps, au rendement, à la tâche, à la pièce, à la commission ou au pourboire). Le SMIC assure aux salariés dont les salaires sont les plus faibles la garantie de leur pouvoir d'achat et une participation au développement économique de la Nation.

Le montant du **SMIC horaire brut** est fixé, depuis le 1er janvier 2011, à 9 €.

Les jeunes de moins de 18 ans titulaires d'un contrat de travail sont rémunérés au minimum sur la base du SMIC :

- minoré de 20 % avant 17 ans,
- minoré de 10 % entre 17 et 18 ans.

A noter : pas de minoration de la rémunération si le jeune possède six mois de pratique professionnelle dans la branche.

L'employeur calcule le **salaire net** en déduisant du salaire brut les **charges salariales** qui représentent environ 20% du salaire brut.

Au terme de son contrat, le jeune reçoit une **indemnité de congés payés**. Le montant de cette indemnité est obtenu de la façon suivante :

- on prend 10 % des salaires bruts perçus ;
- on enlève les charges salariales qui représentent environ 20% de cette somme.

Compte tenu de ces informations, Aurélie a-t-elle intérêt à accepter cet emploi ?

Étape 2 : *les élèves prennent connaissance du document donné sur la page suivante. Après qu'ils se soient appropriés ce document, une discussion s'établit pour expliciter certains mots ou certaines notions. Les élèves travaillent ensuite en autonomie puis une synthèse collective est réalisée à l'issue du travail.*

Voici la fiche de salaire d'une employée de 20 ans du centre de vacances « Les alouettes » qui effectue 120 heures de travail :

Association Les Alouettes
2 rue Saint Michel
59009 VILLENEUVE D'ASCQ

SIRET	53713180700039
URSSAF	280 403 4179461

BULLETIN DE PAIE

Période	du 01/07/2011 au 31/07/2011
Paiement	Par virement le 01/08/2011
Plafond du mois	1899,00

Code salarié	S353
Emploi	Animatrice saisonnière
Qualification	Stagiaire BAFA
Heures de présence	120,00

Gabriella SOLIS
56 Avenue Aimé Césaire
59343 ROUBAIX

Elément	Libellé	Base	Taux salarial	Montant salarial	Cotisation patronale	
					Tx patronal	Mont. patronal
7234	Salaire de base	120,00	9,0000	1080,00		
2726	Congés payés	1080,00	10,0000	108,00		
	SALAIRE BRUT			1188,00		
	CHARGES					
55	CSG déductible	1009,80	5,1000	-51,50		
56	CSG non déductible	1009,80	2,4000	-24,24		
57	CRDS	1009,80	0,5000	-5,05		
58	Maladie, maternité, décès	1188,00	0,7500	-8,91	12,8000	152,06
61	Vieillesse plafonnée	1188,00	6,6500	-79,00	8,3000	98,60
332	Solidarité autonomie	1188,00			0,3000	3,56
299	Vieillesse déplafonnée	1188,00	0,1000	-1,19	1,6000	19,01
64	Allocations familiales	1188,00			5,4000	64,15
65	Aide au logement	1188,00			0,1000	1,19
1251	Aide au logement collectivités	1188,00			0,5000	5,94
66	Accident du travail	1188,00			1,1000	13,07
75	Transport	1188,00			1,7000	20,20
67	Retraite	1188,00	2,2800	-27,09	3,4100	40,51
73	Centre de gestion	1188,00			0,5500	6,53
74	Centre National de la Fonction Publique Territoriale	1188,00			1,0000	11,88
	TOTAL COTISATIONS			196,97		436,71
	MONTANT A VERSER			991,03		

1°) Citer deux cotisations payées uniquement par le salarié. Citer deux cotisations payées par le salarié et l'employeur.

2°) Quel est le coût total de ce salarié pour le centre de vacances ?

3°) La base de calcul pour les deux CSG (déductible et non-déductible) et la CRDS est un pourcentage du salaire brut. Déterminer ce pourcentage.

4°) Afin de calculer le pourcentage du salaire brut que représentent les charges salariales, Léa a fait la somme des taux et a trouvé 17,78. Est-ce exact ?

Approfondissement possible :

Le gouvernement envisage de faire passer le montant de la CSG déductible de 5,1% à 6,1%. Quel sera alors le pourcentage de diminution du salaire ?

Etape 3 *: travail en temps libre ou en salle informatique.*

En utilisant un tableur, établir la fiche de salaire d'un salarié de 19 ans de ce centre de vacances effectuant 160 heures de travail.

Calcul d’impôts

Cette activité (extrait du sujet du groupement 5 du CRPE session 2009) a pour but :

- d’entraîner les élèves à une pratique aisée de techniques élémentaires de calcul sur les pourcentages ;
- d’amener les élèves à avoir une attitude critique vis-à-vis des informations chiffrées.

Problématiques développées : P1 et P6.
Série : ES - L.
Place dans la progression : pendant le cours sur les pourcentages.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur les pourcentages. Donner un sens concret au lien entre une évolution et un pourcentage.
Compétences	Rechercher, extraire et organiser l’information utile. Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l’oral.
Connaissances	Pourcentages.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel.

M. et Mme Durand sont mariés et n’ont pas de personne à charge.
Pour l’année étudiée dans cet exercice, leur revenu imposable est de 50 000 €.

1°) Sachant que ce revenu imposable a été calculé en opérant sur le revenu annuel du couple une réduction de 10%, calculer le revenu annuel du couple avant cette réduction.

2°) Le revenu annuel de Mme Durand représente 85 % du revenu annuel de M. Durand. Quel est le revenu annuel de M. Durand ?

3°) Pour les couples mariés sans personne à charge, le nombre de parts N est égal à 2.
Calculer le montant de l’impôt à payer pour ce couple en utilisant le barème donné ci-dessous :

4 CALCULEZ LE QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS

Ce quotient « QF » est égal à : $\dfrac{\text{R (revenu imposable)}}{\text{N (nombre de parts)}} =$

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu).

5 CALCULEZ VOTRE IMPÔT « I » À L’AIDE DU BARÈME SUIVANT :

Si votre « QF » $\left(\frac{R}{N}\right)$	n’excède pas 5 687 €		votre impôt sera égal à : 0
	est supérieur à 5 687 €	et inférieur ou égal à 11 344 €	votre impôt sera égal à : (R × 0,055) – (312,79 € × N)
	est supérieur à 11 344 €	et inférieur ou égal à 25 195 €	votre impôt sera égal à : (R × 0,14) – (1 277,03 € × N)
	est supérieur à 25 195 €	et inférieur ou égal à 67 546 €	votre impôt sera égal à : (R × 0,30) – (5 308,23 € × N)
	est supérieur à 67 546 €		votre impôt sera égal à : (R × 0,40) – (12 062,83 € × N)

Source: Ministère de l'Économie et des finances

4°) On avait proposé à Mme Durand un autre poste lui offrant une augmentation de son revenu annuel de 1 000 €.

Son mari l’en avait dissuadée en lui disant : « Tu n’y songes pas ! Avec ce nouveau poste, nous allons changer de tranche d’imposition et toute ton augmentation va être absorbée par les impôts.»

Son argument était-il valable ? Expliquer la réponse.

4. Suites

Modes de génération d'une suite

Ces deux activités ont pour but d'illustrer des modes de génération de suites à partir de nuages de points à l'aide d'un lissage par moyennes mobiles. Les travaux s'effectuent sur tableur. L'objectif est également de donner un sens concret, ici économique, à la notion de suite.

Problématiques développées : P2, P3 et P6.
Série : ES-L, éventuellement S.
Place dans la progression : avant le chapitre sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Introduire la notion de suites et exploiter sa représentation graphique.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique face aux résultats obtenus. Communiquer à l'oral. B2I lycée.
Connaissances	Représentation d'une série statistique. Notion d'évolution.
Logiciels	Tableur
Modalités de gestion de classe	Travail individuel. Accompagnement personnalisé.

Exemple 1 : illustrer l'évolution du prix de l'essence

Trois documents sont fournis aux élèves : 1) un extrait d'un cours d'économie, 2) un tableau donnant les prix de l'essence sur une période et 3) quelques éléments du contexte économique de cette période.

Document 1 : extrait d'un cours d'économie

Une série chronologique est une série statistique ordonnée en fonction du temps.

Sur la représentation graphique d'une série chronologique, on peut distinguer les composantes fondamentales suivantes :

• le mouvement de tendance générale ou trend indiquant l'évolution générale du phénomène étudié ;

• les mouvements cycliques sur une grande période autour du trend. Ces mouvements peuvent être périodiques (exemple : récession et expansion économique, etc.) ;

• les mouvements saisonniers ou variations saisonnières sont des variations se reproduisant périodiquement à des moments bien déterminés (exemple : vente de mazout avant l'hiver, etc.) ;

• les mouvements accidentels ou résiduels sont dus à des facteurs exceptionnels pour la plupart imprévisibles (grève, risque de guerre, etc.).

Document 2 : prix de l'essence sur une période

Le document ci-dessous donne les variations du prix d'un litre d'essence entre les années 1988 et 2007. Ces prix sont exprimés en euros.

Année	Prix
1988	0,749
1989	0,813
1990	0,816
1991	0,805
1992	0,784
1993	0,788
1994	0,819
1995	0,867
1996	0,921
1997	0,956

Année	Prix
1998	0,980
1999	1,006
2000	1,099
2001	1,049
2002	1,000
2003	1,040
2004	1,070
2005	1,220
2006	1,250
2007	1,265

Source : Insee, annuaire statistique de la France

Document 3 : contexte historique de cette période

- Les prix s'effondrèrent en 1987. Ces bas prix stimulèrent la consommation et ralentirent la production hors moyen orient où les coûts d'exploitation sont plus élevés (cas de l'extraction offshore par exemple).
- Les conflits entre le Koweït et l'Iraq en 1990 annulèrent l'offre de pétrole de ces pays qui fut compensée par l'Arabie Saoudite et le Venezuela pour la majorité, le reste des pays de l'OPEP comblant le manque à produire.
- Les prix en déclin depuis le début des années 1990 ne remontèrent qu'à partir du boom économique aux États-unis et en Asie au milieu des années 1990.
- La crise financière asiatique mit un terme brutal à l'embellie des prix à partir de 1997.
- Le déclin des prix s'accentua jusqu'en février 1999 pour atteindre 10 dollars américains/baril. Puis à partir de mars 99, à la suite d'un accord de réduction de la production des pays de l'OPEP mais aussi d'Oman, de la Fédération de Russie, de Mexico et de la Norvège, les prix n'ont cessé d'augmenter jusqu'à atteindre plus de 30 dollars américains/baril un an plus tard. L'OPEP décida alors d'augmenter la production avec comme objectif de stabiliser les prix entre 20 et 25 dollars américains/baril. Les prix redescendirent à nouveau à partir de décembre 2000 pour se stabiliser autour de 28 dollars américains.
- A la suite des attentats du 11 septembre 2001 une légère hausse a eu lieu, mais très rapidement, du fait d'une baisse de la demande en fuel d'aviation et des perspectives de stagnation de la croissance économique qui prévalaient jusqu'alors, les cours ont à nouveau plongé et l'OPEP a décidé de réduire sa production à partir de janvier 2002 à condition que les pays hors de l'OPEP contribuent également à cette réduction.
- Depuis le début des années 2000, le cours du pétrole a connu un niveau historique très élevé et une hausse constante depuis 2001. La moyenne des prix du pétrole a été de 18.5$ environ sur la période 1985-2000 alors que depuis 2000, celle-ci est de 41.6$" (2000-2007). Cette hausse très importante s'explique notamment par le dynamisme de l'économie chinoise et l'émergence de pays nouvellement industrialisés qui tendent à augmenter leur consommation d'énergie, ainsi que par l'amélioration des conditions économiques dans certaines régions du monde et en particulier aux États-Unis (qui se retrouvent de ce fait devoir faire face à une certaine tension au niveau des stocks nationaux). Les sous-jacents ne suffisent cependant pas à expliquer le développement des cours du pétrole sur les années 2003-2004. Ceux-ci ont, en effet, été également fortement influencés par des sur-réactions spéculatives en relation avec les perturbations potentielles au niveau de l'offre (évènements en Irak, par exemple) ou de la demande (faiblesse et baisse des stocks américains).

1. Afin d'ordonner les prix du document 2, on décide d'appeler p_0 le prix d'un libre d'essence en 2008, p_1 le prix en 2009, et ainsi de suite… Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur.

2. Exploiter la représentation graphique de la suite des prix pour décrire certaines composantes du document 1, composantes que l'on expliquera à l'aide du document 3.

3. Afin d'observer une tendance générale, on décide de créer une nouvelle suite de prix (q_n) obtenue par lissage de moyennes mobiles.

Le principe de cette méthode est de construire une nouvelle suite obtenue en calculant des moyennes arithmétiques successives de longueur fixe à partir des données originales. Chacune de ces moyennes obtenues correspondra au "milieu" de la période pour laquelle la moyenne arithmétique vient d'être calculée.

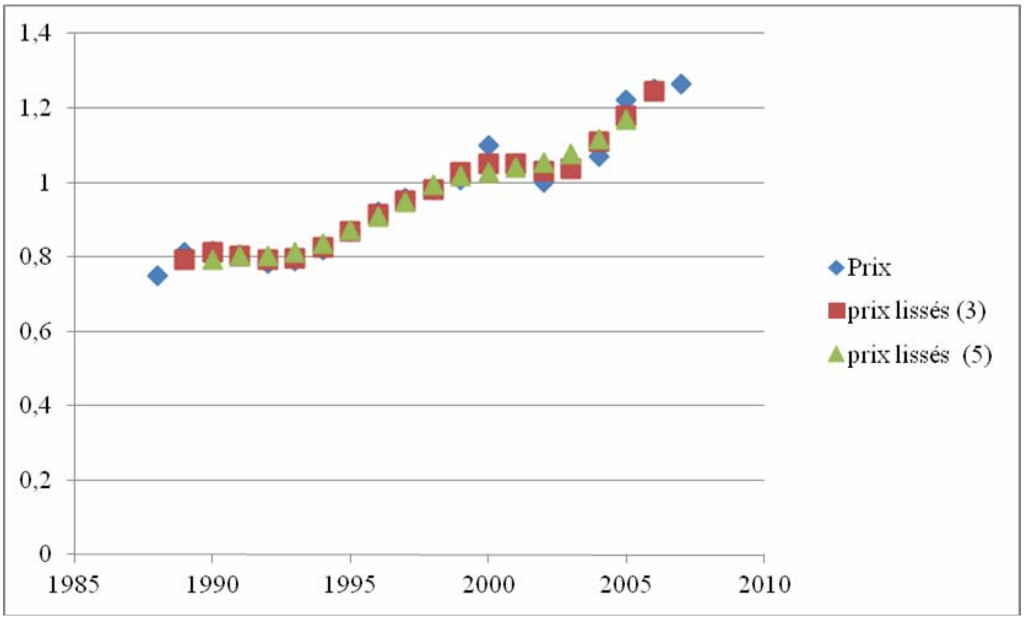
Par exemple :

Année	Rang	Termes	Prix	Prix lissés par moyennes mobiles de période 3
1988	0	p_0	0,749	
1989	1	p_1	0,813	La moyenne de période 3 est égale à : (0,749+0,813+0,813)/3=0,792
1990	2	p_2	0,816	0,811
1991	3	p_3	0,805	0,801
1992	…	…	0,784	…

Réaliser une telle feuille de calcul à l'aide d'un tableur. Ajouter une colonne avec la suite des prix lissés par moyennes mobiles de période 5 puis représenter graphiquement dans le même repère les trois suites de prix obtenues. Ces nouveaux graphiques permettent-ils de mieux mettre en correspondance certaines informations du document 3 ?

Commentaires :

Les élèves aboutissent à une représentation du type suivant :



On peut montrer aux élèves que le logiciel permet d'ajouter une courbe de tendance par moyennes mobiles directement par un clic droit sur le nuage de points de la suite initiale en précisant la période. On explique ainsi comment ont été réalisés les calculs du logiciel.

Exemple 2 : le grossiste en fleurs coupées

Comment aider un grossiste en fleurs coupées à harmoniser un peu ses prix pour éviter de trop fortes fluctuations lors de la revente de sa marchandise ?

Le tableau ci-dessous donne le prix d'achat HT moyen, en gros, d'une botte de 10 roses. Les prix sont relevés sur quatre périodes de chaque mois, de septembre 2009 à août 2010.

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par périodes (en euros)
Septembre	
1	1,82
2	2,02
3	2,63
4	2,27
Octobre	
5	2,23
6	2,36
7	2,61
8	3,01
Novembre	
9	3,81
10	3,01
11	2,92
12	2,93
Décembre	
13	3,82
14	4,01
15	4,22
16	5,82
Janvier	
17	4,51
18	4,52
19	5,13
20	4,57
Février	
21	5,01
22	12,08
23	5,04
24	6,02

Périodes	Prix moyen d'une botte de roses par période (en euros)
Mars	
25	6,03
26	5,04
27	4,11
28	3,53
Avril	
29	2,54
30	2,64
31	2,73
32	2,83
Mai	
33	2,84
34	3,04
35	4,11
36	3,81
Juin	
37	3,01
38	2,10
39	2,22
40	2,15
Juillet	
41	2,21
42	2,09
43	1,83
44	1,73
Août	
45	3,02
46	3,31
47	3,52
48	2,50

1. Illustrer l'évolution de cette suite de prix à l'aide d'un nuage de points réalisé à l'aide d'un tableur. Exploiter la représentation graphique de cette suite pour décrire certaines composantes économiques du cours de la botte de roses et les interpréter (mouvements saisonniers sur 12 mois, fêtes, coûts en énergie pour la production,…).

2. Le grossiste cherche à lisser davantage ses prix, sur la quinzaine, voire sur le mois. Proposer une stratégie permettant de l'aider.

3. Le grossiste s'octroie un taux de marge commerciale brute de 33,3% pour la revente. Le lissage des prix à la quinzaine ou au mois lui est-il favorable, défavorable ou sans effet ?

Jeux de nombres

De nombreux jeux de nombres, dont s'emparent facilement les élèves, génèrent des suites numériques. Captivants et synonymes de curiosité, ces jeux facilitent le développement des compétences pour la formation des élèves. L'activité présentée ci-dessous a pour but d'aborder les modes de génération d'une suite. Sans grande difficulté, elle permet aux élèves d'investir rapidement le sujet. Attrayante, elle apporte beaucoup en termes d'investigation tout en renforçant le calcul mental. Avant de se lancer dans la conjecture, les élèves observent différentes suites de nombres, ce qui leur permet de conceptualiser différentes natures de suites en les comparant. Cette activité permet aussi de favoriser l'oral. La partie algorithmique renforce le raisonnement et la logique.

Le travail demandé aux élèves est réalisé en deux temps :

1. Une lecture active de l'énoncé suivie d'une recherche individuelle. Le professeur accompagne l'élève dans son travail d'investigation, puis donne la parole aux élèves pour une analyse critique des résultats qu'ils ont proposés.
2. Dans un deuxième temps, l'activité sollicite une démarche algorithmique. Le professeur termine sa séance en demandant aux élèves d'écrire l'algorithme dans le langage de leur choix, de le programmer puis de le tester afin de valider les conjectures émises.

Problématiques développées : P2, P3, P6 et P7.
Série : toutes séries.
Place dans la progression : avant le cours sur les suites.

Objectifs pédagogiques	Approcher la notion de suites numériques, en variant les supports et les outils. Amener la notation indicielle des termes d'une suite.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus.
Connaissances	Les notions d'algorithmique de la classe de seconde.
Modalités de gestion de classe	Travail individuel puis collectif. Utilisation de la calculatrice.

<u>Énoncé de l'exercice</u>

On considère le jeu de nombres suivant :

> On choisit un nombre entier entre 1 et 99.
> À chaque étape, on le remplace par la somme des carrés de ses chiffres.

Exemple : Je choisis n=7.

<u>Étape 1</u>: 49

<u>Étape 2</u>: 97…

1. Poursuivre la procédure pour n = 7.
2. Recommencer avec n = 4.
3. Faire un essai avec un autre entier de votre choix.
4. Comparer les résultats avec ceux obtenus par d'autres élèves de la classe.
5. Émettre une conjecture sur les suites de nombres obtenus.

6. Voici un algorithme :

Variables

q, r, n et s

Entrée

Saisir le nombre entier n

Traitement

Affecter 0 à s

Tant que $n > 0$

q prend la partie entière de $\dfrac{n}{10}$

r prend la valeur $n - 10q$

s prend la valeur $s + r^2$

n prend la valeur q

Fin du Tant que

Sortie

Afficher s

- Expliquer le rôle de cet algorithme.
- Compléter cet algorithme afin qu'il puisse valider la conjecture émise.

Évolution de cellules cancéreuses

Cette activité est tirée de documents écrits par Dominique Barbolosi (Université Paul Cézanne).

Problématiques développées : P2, P3 et P7..
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème issu d'un phénomène discret. Utiliser les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral
Connaissances	Représentation graphique d'un nuage de points. Réaliser une feuille de calcul à l'aide du tableur.
Logiciels	Tableur, calculatrice, logiciel de programmation.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie.

Tout cancer débute par la production d'une cellule cancéreuse. Au cours du temps, cette cellule va produire un ensemble de cellules filles appelé tumeur. On observe que le temps de doublement T d'une tumeur cancéreuse (c'est-à-dire le temps mis par une tumeur donnée pour doubler son nombre de cellules) est sensiblement constant et dépend du type de cancer. Ce temps de doublement peut être évalué sur des cellules prélevées dans la tumeur et mises en culture. Par exemple, pour un cancer du sein, T=14 semaines ; pour certains cancers du poumon T=21 semaines ; pour les cancers du colon et du rectum, T=90 semaines.

Évolution d'une tumeur sans traitement

On fait l'hypothèse qu'une cellule cancéreuse apparaît dans l'organisme d'un individu.
On cherche comment connaître le nombre de cellules cancéreuses qui composent une tumeur dont le temps de doublement T est connu à la fin de chaque période.

Modélisation

Voici deux schémas :

Schéma 1 :

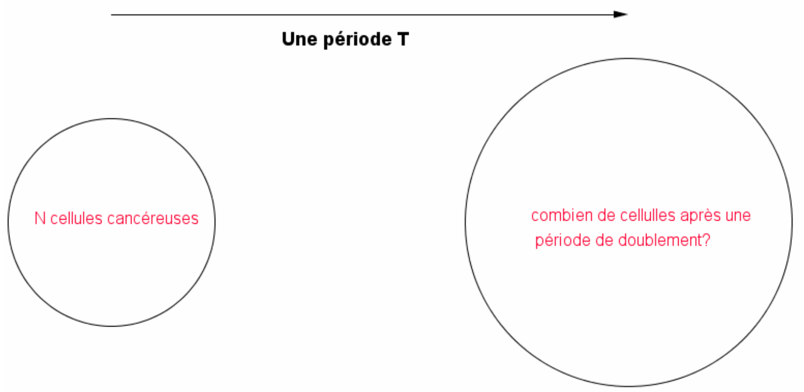
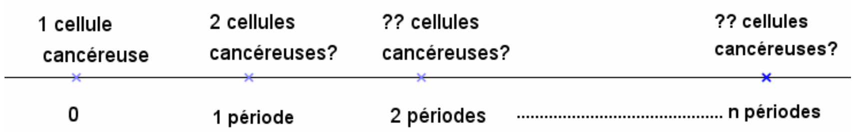


Schéma 2 :



1. À l'aide d'un tableur, réaliser et compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	période	nombre de cellules cancéreuses
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

2. À l'aide du tableur, représenter le nuage de points correspondant à l'évolution du nombre de cellules cancéreuses.

3. Compléter le tableau suivant :

Période	0	1	2	3	….	n périodes
Nombre de cellules cancéreuses	1	2	…	…	….	…
Nombre de cellules cancéreuses	u_0	u_1	…	…	….	u_n

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de cellules cancéreuses n période(s) après la naissance de la première cellule cancéreuse. On a donc $u_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Remarque : cette situation peut également être exploitée pour introduire les suites géométriques, mais l'activité privilégie ici un mode de génération numérique et graphique.

<u>Découverte de la tumeur</u>

Actuellement, la plus petite tumeur cancéreuse détectable est constituée de 10^9 cellules, ce qui correspond à peu près à une tumeur d'une masse égale à 1 gramme.

Question : si on découvre aujourd'hui une tumeur ayant 10^9 cellules, peut-on savoir quand est apparue la première cellule cancéreuse ?

Méthode 1 : utiliser un tableur.

Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme

Variables
    n, u
Initialisation
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur 1
Traitement
    Tant que $u <$ … Faire
        n prend la valeur $n + 1$
        u prend la valeur …
    Fin du Tant que
Sortie
        Afficher n

1. Compléter l'algorithme afin qu'il puisse donner une réponse à la question posée.
2. Coder l'algorithme complété à l'aide de la calculatrice, puis l'exécuter. Conclure.

Prolongements possibles

Piste 1

Après le traitement d'un cancer du sein (T=14 semaines), il est d'usage de surveiller la personne traitée sur une période de 5 ans. Sachant qu'un traitement chirurgical peut laisser en résidu indétectable une masse tumorale de 10^3 cellules, expliquer l'origine du choix de 5 ans comme période de surveillance d'un cancer du sein après traitement.

Piste 2

Pour le cancer du colon (T=90 semaines), on préconise un dépistage à partir de 50 ans. Un individu développe une cellule cancéreuse à l'âge de 20 ans. Le dépistage proposé est-il cohérent ? Justifier la réponse.

Population de pies bavardes

Nous allons, dans cette section, nous pencher sur une espèce d'oiseaux, la pie bavarde. C'est une population d'oiseaux très présente en Europe ainsi qu'en Amérique du Nord, surtout dans les provinces de l'Ouest. Il existe une grande population de pies bavardes en Alsace, région de l'est de la France, dans une grande réserve naturelle.

Partie A : Essais de modélisation

Problématiques développées : P2, P3 et P6
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciel	Tableur.
Modalités de gestion de classe	Travail de groupe.

Activité

Un groupe de biologistes a relevé pendant quatre ans, le premier janvier de chaque année depuis 2000, le nombre de pies vivant sur une île d'une superficie de 60 km^2.

Il a obtenu les résultats suivants :

Année	Population
2000	300
2001	270
2002	243
2003	220

Les mesures ont été stoppées pendant quelques années, puis ont repris en 2010. On comptait 105 pies sur l'île le premier janvier 2010.

1. Entrer les données dans une feuille de calcul.
2. Proposer une modélisation de la situation à l'aide d'une suite (p_n).
3. En utilisant ce modèle, quel serait la population en 2010 ?
4. Peut-on valider cette modélisation ?

Les biologistes ont admis que le nombre d'oiseaux diminuait de 10% chaque année, à cause des prédateurs et de la régulation des naissances et des décès.

Quelle est dans ce cas la nature de la suite (p_n) ?

Partie B : Premier modèle d'évolution - les biologistes n'interviennent pas.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Séries : toutes séries.
Place dans la progression : après l'introduction de la notion de suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	B2I lycée : le tableur. Rechercher de manière autonome. Mener des raisonnements. Avoir une attitude critique.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur. Les notions algorithmiques de la classe de seconde
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Devoir à la maison et (ou) travail de groupe.

Fiche élève

Les deux questions posées à la classe sont :

- Comment évolue la population de pies ?
- En quelle année la population disparaît-elle de l'île si la situation perdure ?

Fiche professeur

Ces questions permettent de mettre en œuvre une démarche expérimentale.

Dans un premier temps, le travail est mené à l'aide d'un tableur.

Celui-ci permet de constater que la population décroît et de déterminer en quelle année cette espèce d'oiseaux aura disparu de l'île. On peut envisager d'utiliser une courbe de tendance.

Le recours à une méthode algorithmique dans un second temps, permet au professeur de proposer des énoncés différenciés, répondant aux besoins de chaque apprenant.

Énoncé 1

1. Interpréter l'algorithme ci-dessous.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← 105
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← pop × 0,9
                n ← n + 1
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en 2010 + n »
```

Énoncé 2

1. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

```
Initialisation
        pop ← …
        n prend la valeur 0
Traitement
        Tant que pop >= 1 Faire
                pop ← …
                n ← …
        Fin du Tant que
Sortie
                Afficher « la population aura disparu en … »
```

Énoncé 3

1. Écrire un algorithme qui calcule et affiche en sortie l'année où la population aura disparu.
2. Coder l'algorithme dans un langage de programmation et l'exécuter.
3. Interpréter le résultat affiché en sortie.

Partie C : Deuxième modèle d'évolution - les biologistes interviennent.

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6, P7 et P8.
Série : S.
Place dans la programmation : après la notion de suite géométrique et le sens de variation d'une suite.

Objectifs pédagogiques	Modélisation à l'aide d'une suite géométrique.
Compétences	Interpréter un algorithme. Compléter un algorithme. Modifier un algorithme. Émettre des conjectures. Mobiliser ses connaissances. Analyser de manière critique un document. Utiliser les quantificateurs.
Connaissances	Modes de génération d'une suite. Courbe de tendance du tableur.
Logiciels	Tableur, logiciel de programmation
Modalités de gestion de classe	Recherche par groupes, avec éventuellement une différenciation portant sur des questions plus ou moins détaillées selon les groupes.

Fiche élève

Pour tenter de modifier la situation, les biologistes décident d'installer un nombre a d'oiseaux de cette espèce le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.
Ils estiment que le risque d'extinction est évité si la population se stabilise autour de 200 oiseaux sur l'île.

1. Partie expérimentale

1.A. Modifier la feuille de calcul établie dans la partie B afin de tenir compte de ce changement.
On pourra noter la valeur de a dans une cellule particulière et on prendra ici $a = 5$.

1.B. Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'évolution du nombre d'oiseaux vivant sur l'île ?

1.C. Les biologistes éviteraient-ils ainsi l'extinction de l'espèce ?

1.D. Reprendre les questions *a*., *b*. et *c*. avec les valeurs $a = 10$, $a = 20$ puis $a = 30$.

1.E. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour éviter l'extinction ?

1.F. Combien doivent-ils installer au minimum d'oiseaux chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années sa valeur de l'an 2000 ?

2. Justification

Caroline a répondu correctement à la question 1.E, elle amorce une recherche supplémentaire avec le tableur. Un extrait de sa feuille de calcul est représenté ci-après.
Pour tout entier naturel n, on note q_n le nombre d'oiseaux vivant sur l'île le premier janvier $2010 + n$ lorsque les biologistes décident d'installer 20 oiseaux le premier janvier de chaque année suivant l'année 2010.

	A	B	C	D	E	
1	n	q_n	q_n-200	quotient	a=	20
2	0	105	-95	0,9		
3	1	114,5	-85,5	0,9		
4	2	123,05	-76,95	0,9		
5	3	130,75	-69,26			

2.A. Pour tout entier naturel n, exprimer q_{n+1} en fonction de q_n.

2.B. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = q_n - 200$.

2.C. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Exprimer alors, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

3. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n : $q_n = 200 - 95\times(0,9)^n$

4. Démontrer que la suite (q_n) est croissante.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $q_n < 200$.

Pour aller plus loin

On se propose de déterminer le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n > n_0$, q_n appartienne à l'intervalle]199 ;200[.

Pierre propose à Caroline un algorithme ainsi que sa programmation en langage *Scilab* correspondante. Il affirme qu'en exécutant le programme, elle aura répondu à la question :

Initialisation

  n prend la valeur 0

  $q \leftarrow 200 - 95\times(0,9)^n$

Traitement

  Tant que $q < 199$ Faire

    $n \leftarrow n + 1$

    $q \leftarrow 200 - 95\times(0,9)^n$

  Fin du Tant que

Sortie

    Afficher la valeur de n_0

```
n=0 ;
q=200-95*0.9^n ;
while q<=199
  n=n+1 ;
  q=200-95*0,9^n ;
end
afficher('la première valeur de n pour laquelle q_n est ..
compris strictement entre 199 et 200 est égale à '+string(n))
```

1. Interpréter cet algorithme.
2. Coder l'algorithme et l'exécuter.
3. Caroline dit alors à Pierre : « On obtient bien une valeur de n_0 pour laquelle q_{n_0} appartient à l'intervalle]199 ; 200[, mais pourquoi es-tu certain que pour les valeurs de n plus grandes que n_0 la propriété sera encore vérifiée ? ».
4. Répondre alors à la question de l'énoncé.
5. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in]199,9 ; 200[$.
   Répondre à la même question avec $q_n \in]199,99 ; 200[$.
6. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il détermine le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n>n_0$, $q_n \in]200 - \lambda ; 200[$, où λ est un réel strictement positif saisi en entrée à l'exécution de l'algorithme.
   Que peut-on en déduire quant à la limite de q_n lorsque n tend vers $+\infty$?

<u>Fiche professeur</u>

La question sur le nombre minimal d'oiseaux à installer chaque année pour que le nombre de pies vivant sur l'île retrouve au bout d'un certain nombre d'années la valeur de l'an 2000 peut faire l'objet d'un problème ouvert dont il est possible de demander la démonstration.

Ce travail peut faire l'objet d'un exposé oral.

5. Accompagnement personnalisé

Cartes de jeux

Problématiques développées : P2, P3, P5, P6 et P7.
Série : série S.
Place dans la progression : tout au long de l'année.

Objectifs pédagogiques	Apprendre à chercher de façon ludique. Utiliser différents outils pour résoudre un problème. Mettre en commun différentes démarches de résolution. Privilégier le travail en groupes. Découvrir la spécialité mathématique en Terminale.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de façon autonome. Communiquer à l'oral. Prendre des initiatives.
Connaissances	Celles du programme de seconde ou de première.
Modalités de gestion de classe	Accompagnement Personnalisé.

Description du jeu de cartes

Chaque carte présente un problème court et ouvert, réclamant une réponse (qui peut-être multiple) numérique, approchée ou exacte. Pour résoudre ce problème, l'utilisation de l'informatique et/ou de l'algorithmique sont souvent nécessaires, utiles, mais quelques rares fois inutiles.

Les sujets des problèmes sont variés et couvrent la plus grande part possible du programme de 1èreS.

Les élèves construisent leur démarche en autonomie ; ils choisissent eux-mêmes les logiciels qu'ils comptent utiliser.

Les cartes sont classées suivant la difficulté de résolution :

Cartes vertes : Niveau élémentaire, pour être accessible à tous.
Cartes bleues : Niveau intermédiaire, pour atteindre une maîtrise des outils et des démarches.
Cartes rouges : Niveau supérieur, pour approfondir les démarches.
Cartes noires : Niveau très difficile, pour le plaisir du challenge.

Mises en œuvre possibles

Lors d'une séance, chaque élève prend une carte de la couleur de son choix. Il doit alors résoudre le problème qu'elle présente pour en choisir une autre, et ainsi de suite.
On peut aussi penser à une utilisation en classe entière, en travail en binôme, à la condition de disposer d'un ordinateur pour chaque groupe.

Les énoncés peuvent simplement servir de banque d'énoncés d'exercices utilisant l'outil informatique.

On peut enfin imaginer un concours entre deux classes (ou groupes) : chacune se voit remettre un paquet de cartes, le challenge consistant alors pour chaque classe à résoudre le maximum de cartes dans le temps imparti.

Remarques

La demande du professeur peut être de seulement donner la (ou les) réponse(s) exacte(s), ou bien un compte-rendu expliquant la démarche suivie. On peut imaginer une narration de recherche pour certaines des situations proposées.

Pour l'évaluation, chaque élève dispose d'une feuille de positionnement qui lui permet de se situer dans la maîtrise des outils informatiques.

Annexes

Fiche de suivi individuelle

NOM :

Prénom :

CLASSE :

Cartes vertes

N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
101			119		
102			120		
103			121		
104			122		
105			123		
106			124		
107			125		
108			126		
109			127		
110			128		
111			129		
112			130		
113			131		
114			132		
115			133		
116			134		
117			135		
118			136		

Cartes noires

N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
401			406		
402			407		
403			408		
404			409		
405			410		

Cartes bleues

N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
201			217		
202			218		
203			219		
204			220		
205			221		
206			222		
207			223		
208			224		
209			225		
210			226		
211			227		
212			228		
213			229		
214			230		
215			231		
216			232		

Cartes rouges

N°	Date de Validation	Signature	N°	Date de Validation	Signature
301			313		
302			314		
303			315		
304			316		
305			317		
306			318		
307			319		
308			320		
309			321		
310			322		
311			323		
312			324		

Les principales sources dont sont issus les problèmes

Torneo de Computación y Matemática (CyM), Argentine : www.oma.org.ar/nacional/cym/index.htm

Clubes Cabri, Argentine : www.oma.org.ar/cabri/index.htm

Le concours Alkhawarichti de l'APMEP Lille : http://defiapmep.free.fr/calculs/

Le projet Euler : http://eulerdz.toile-libre.org/index.php

Five hundred mathematical challenges (MAA)

L'épreuve expérimentale de mathématiques en terminale S (IREM Bordeaux)

Introduction de la notion de paramètre au lycée avec un logiciel de géométrie dynamique (IREM)

Bulletin vert (Exercices de-ci, de-là, APMEP)

Quelques exemples de cartes

101 1

Calculer

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2000}$$

à 10^{-3} près.

1 101

102 1

On appelle suite de Fibonacci la suite (F_n) définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ pout tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Que vaut F_{30} ?

1 102

103 1

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que

$$207a + 208b = 66935$$

1 103

104 1

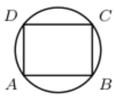
Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a\ ,\ b)$ tels que $a \times b < 100$, et $3a^2 - b^2 + 4$ soit strictement positif et multiple de 77.

1 104

209 1

$ABCD$ est un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1. Quelle est la longueur du côté $[AB]$ sachant que $AB = \overset{\frown}{BC}$?

$\overset{\frown}{BC}$ désigne la longueur de l'arc de cercle entre B et C.



On donnera la réponse arrondie au centième.

1 209

210 1

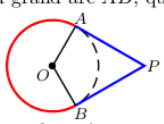
Dans l'addition ci-dessous, on a remplacé tous les chiffres par des lettres. Aucun nombre ne commence par 0. Des lettres différentes représentent des chiffres différents. Quelle est l'addition cachée ?

$$TEN + TEN + FORTY = SIXTY$$

1 210

211 1

Par P on a tracé deux tangentes à un cercle de rayon 1, de centre O. Les points de contacts sont A et B. Quand $AP + PB$ est égale au grand arc $\overset{\frown}{AB}$, que vaut OP ?



On donnera la réponse arrondie au dixième.

1 211

212 1

Trouver un entier naturel de cinq chiffres (tous non nuls), s'écrivant $ABCDE$, tels que $\dfrac{EABDC}{ABCDE}$ soit un nombre entier différent de 1.

Deux lettres différentes peuvent représenter le même chiffre.

1 212