ministère éducation nationale jeunesse vie associative

éduscol

Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe de première
générale et technologique

Analyse

mars 2012

Table des matières

Introduction

L'enseignement de l'analyse en classe de première constitue un enjeu d'importance pour la formation mathématique des élèves. L'objectif est de doter ces derniers d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

Les outils classiques, comme les fonctions, la dérivation et les suites, prennent vie tout au long de la classe de première. Les grandes problématiques du programme, éclairées par quelques scénarios pédagogiques développés tout au long de ce document ressource, sont :

P1 : Comment prendre en compte les acquis des élèves ?

P2 : Comment intégrer les outils-logiciels aux pratiques de classe ?

P3 : Comment travailler par compétences au lycée ?

P4 : Comment utiliser des évaluations diagnostiques ?

P5 : Comment différencier l'enseignement?

P6 : Comment favoriser la diversité de l'activité mathématique des élèves ?

P7 : Comment faire vivre l'algorithmique, la logique et le raisonnement ?

P8 : Comment aider les élèves à analyser leurs erreurs ? (ou à les rendre autonomes, critiques face à leurs résultats ?)

P9 : Comment varier les évaluations (diagnostiques, formatives, sommatives) ou comment différencier les évaluations ?

Une équipe d'enseignants propose dans ce document ressource des pistes, des perspectives, des activités qui relient les contenus et les capacités énoncés dans le programme de première à la classe.

1. Second degré

En classe de seconde, les élèves ont abordé les fonctions polynômes de degré 2. Ils en connaissent les variations (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes représentatives. Ces résultats ont pu, selon le choix du professeur, être partiellement ou totalement admis.

Les situations sur le second degré en classe de première doivent donc prendre appui sur ces acquis de la classe de seconde. Les exemples de scénarios pédagogiques suivants proposent des activités autour de ce thème.

Extrait du programme de première S :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans ce cadre.

Un exemple d'activité sur le second degré

Problématiques développées : P1, P2, P3, P6, P8 et P9.
Activité expérimentée en série S, transférable en ES/L.
Place dans la progression : en début d'année scolaire.

Objectifs pédagogiques	Approfondir la notion de second degré. Former les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. Évaluer individuellement les acquis des élèves.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Calculs d'aires.
Logiciels	*GeoGebra*. *Xcas*. Calculatrice.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Afin d'en préserver la cohérence globale, la séquence pédagogique qui suit est présentée telle qu'elle a été testée et dans son ensemble. Il appartient à l'enseignant de l'adapter à sa classe.

La situation géométrique étudiée est classique. La démarche pédagogique spécifique vise à construire des compétences amorcées en classe de seconde :

- « mettre en œuvre une recherche de façon autonome » (le professeur devient une ressource, secours de l'élève ou du groupe d'élèves) ;
- « mener des raisonnements » ;
- « avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus » ;
- « communiquer à l'écrit et à l'oral ».

grâce à la diversité de l'activité de l'élève (expérimenter, raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit, choisir et appliquer des techniques de calcul).

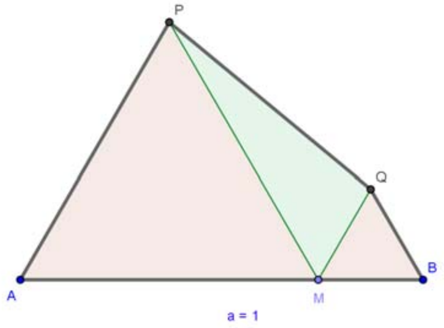
Scénario pédagogique

Au cours de l'année précédente, le professeur a récupéré les travaux de ses élèves sur ce même exercice. À partir de ces matériaux, l'enseignant va proposer à sa classe cinq démarches d'élèves qui permettent d'étudier différentes stratégies de résolution mises en place par les apprenants.

Le scénario pédagogique se déroule sur cinq séances d'une heure. Un devoir surveillé conclut l'activité présentée. Durant chaque séance, les élèves sont répartis par groupes de 5. À chaque séance, la consigne donnée par le professeur est d'étudier la démarche de résolution présentée dans les documents distribués. Un élève du groupe est chargé de finaliser le travail demandé et de le rendre au professeur en fin de séquence. En début de la séance suivante, un retour est effectué à l'oral sur les productions des groupes. Les cinq séances se sont déroulées durant le mois de septembre. La salle informatique est utilisée à chaque fois que cela est nécessaire. Précisons enfin que cette activité a donné lieu à deux devoirs maison qui ont permis à chacun de rédiger les analyses faites en groupes, ainsi qu'à la réalisation d'un poster portant sur la synthèse relative aux fonctions polynômes du second degré (définition, courbe, tableau de variation, sommet).

Énoncé de l'exercice

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1. Les triangles AMP et MBQ sont équilatéraux.



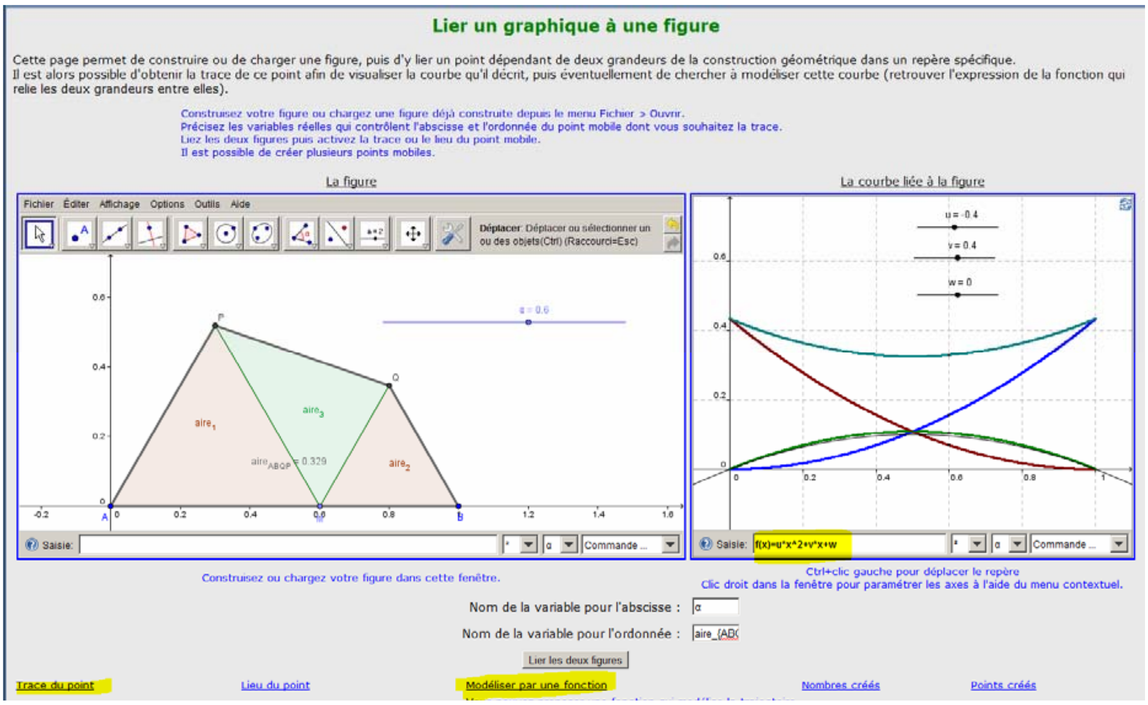
1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP.

Consignes données aux élèves par l'enseignant pour chaque séance :

« Voici la production qu'un élève de ma classe de l'année dernière a proposée pour répondre à l'exercice. Cette production est accompagnée de quelques questions auxquelles vous répondrez après avoir analysé la démarche suivie. Quelques éléments ont été volontairement cachés.
Il est conseillé de décrire les pistes suivies au cours de votre recherche, ainsi que les difficultés rencontrées. »

Séance 1 : analyse de la production de Youssra

J'ai utilisé GéoGébra plus précisément la page « Lier un graphique à une figure » disponible sur le Web à l'adresse
www.geogebra.org/en/upload/files/french/doNuts/LierUneCourbe.htm#ici1
J'ai représenté graphiquement les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB.



Il est facile de constater que l'aire du triangle MPQ est maximale quand « texte caché » et on voit bien que l'aire du polygone ABQP est alors minimale.

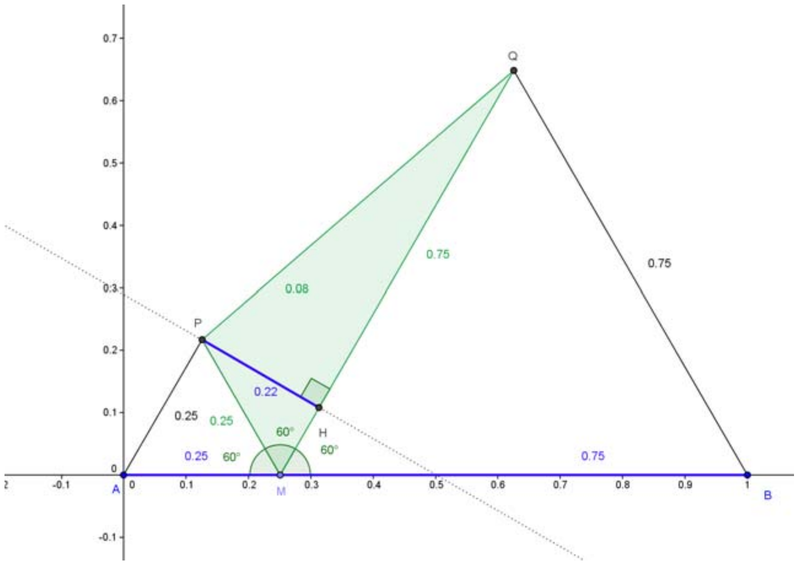
- Compléter la copie d'écran de Youssra par une légende associant courbes et aires.
- Retrouver le « texte caché » de la rédaction de Youssra.

Pour aller plus loin, j'ai pensé utiliser une fonction polynôme de degré 2 pour modéliser la courbe verte qui ressemble à un morceau de parabole. J'ai tâtonné avec trois curseurs, je suis certaine que w=0, et que u et v sont opposés. Mais ça ne marche pas, je n'ai pas réussi à superposer les courbes !

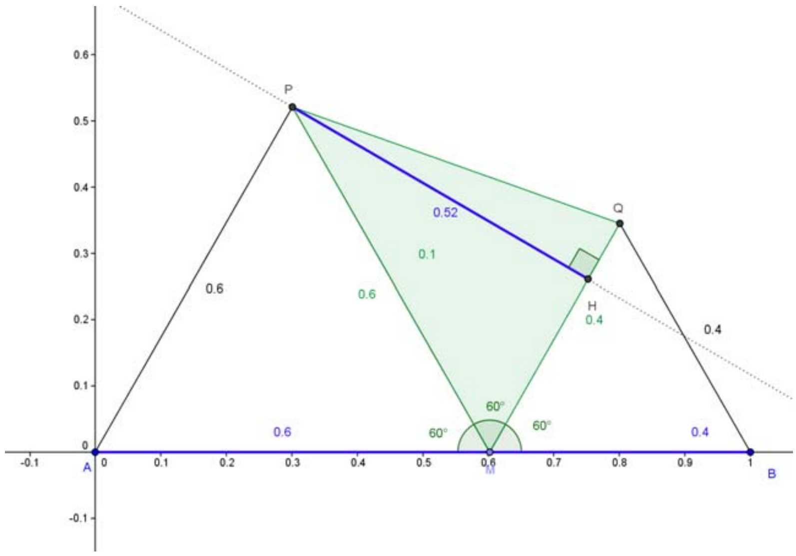
- Expliquer pourquoi w=0.
- Expliquer pourquoi u et v sont opposés.

<u>Séance 2 : analyse de la production de Mylène</u>

Pour comprendre le problème qui me semblait compliqué, j'ai d'abord utilisé GéoGébra pour faire une figure.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,08.



Ici l'aire du triangle MPQ est égale à 0,1.

<u>Première question du sujet.</u>

J'ai calculé, dans le cas général, la hauteur PH en posant x=AM.

Puis j'ai obtenu l'aire du triangle MPQ : $0{,}4x \times (1 - x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$

- Critiquer le résultat énoncé par Mylène :
  « l'aire du triangle MPQ est égale à $0{,}4x \times (1 - x) = 0{,}4x - 0{,}4x^2$ ».

Ensuite, j'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

Graphique caché

En conclusion, l'aire du triangle MPQ est maximale pour $x = 0,5$ autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du triangle MPQ et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Seconde question du sujet.

En additionnant les aires, j'ai trouvé :

Aire(APQB) = « texte caché » + $(0,4x - 0,4x^2) + 0,4(1-x)^2$.

En développant : Aire(APQB)= $0,4x^2$ + « texte caché ».

J'ai tracé la courbe avec ma calculatrice et j'ai trouvé 0,5.

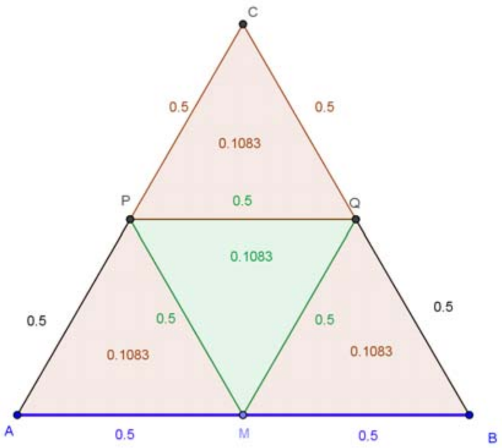
Graphique caché

En conclusion, l'aire du quadrilatère APQB est minimale pour $x = 0,5$ autrement dit quand M est au milieu de [AB].

- Au cours de sa résolution, Mylène utilise une approximation de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Quelle est cette approximation ?
- En utilisant l'approximation de Mylène, retrouver les textes cachés en exprimant l'aire du triangle AMP en fonction de x puis celle du quadrilatère APQB.
- Comme l'a fait Mylène, utiliser la calculatrice pour visualiser la courbe associée à l'aire du quadrilatère APQB et commenter le résultat énoncé par Mylène.

Séance 3 : analyse de la production de Julie

J'ai fait la figure (cf. annexe 1) et placé M au milieu de [AB], j'ai alors remarqué que les trois triangles sont superposables, j'ai pensé à Thalès et complété la figure pour obtenir le triangle ABC.
Dans le formulaire du livre, j'ai trouvé une formule pour l'aire d'un triangle équilatéral, ici de côté 1 donc l'aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$. J'en déduis que l'aire du triangle MPQ est égale à $\frac{\sqrt{3}}{16}$ et que l'aire du trapèze ABQP est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.



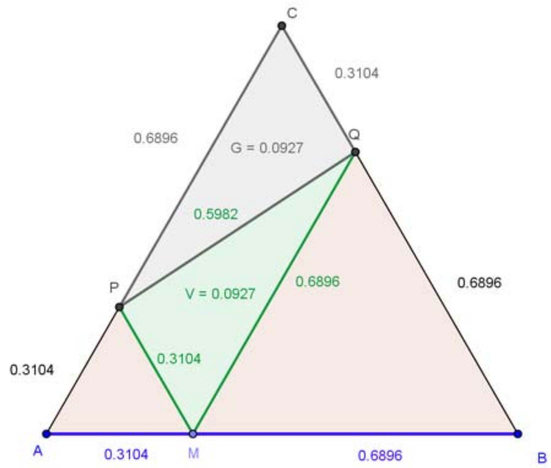
Annexe 1

Dans le cas général, l'aire du triangle équilatéral AMP est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *, celle de BMQ est égale à* $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$ *, V=G donc par découpage, cf. annexe 2, j'obtiens :*

$$2\times V = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$$

D'où $V = \frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$

Après, j'ai voulu comparer V à $\frac{\sqrt{3}}{16}$ *mais je n'ai pas réussi. J'ai donc décidé d'abandonner la méthode … Mais je suis certaine de ma conjecture : le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément au milieu de [AB]. D'ailleurs je l'ai vérifié en traçant les courbes sur papier millimétré (cf. annexe 3).*



Annexe 2

- Julie utilise, sans le justifier, l'égalité $V = G$. Par un raisonnement géométrique, compléter l'exposé de Julie, en démontrant l'égalité des aires des triangles CPQ et MPQ.
- Réaliser l'annexe 3 évoquée par Julie.
- Pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on pose $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$.
- Vérifier que $V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}$.
- En étudiant le signe de $V(x) - V\left(\frac{1}{2}\right)$, démontrer le résultat relatif à l'aire du triangle MPQ.
- Sans aucun calcul, justifier la dernière intuition de Julie : « le minimum de l'une et le maximum de l'autre sont bien obtenus simultanément ».

<u>Séance 4 : analyse de la production d'Alexis</u>

Comme je ne trouvais rien malgré tout le temps qui passait, j'ai cherché « aire d'un triangle » sur « Wikipédia » et j'ai trouvé trois formules :

- *l'une utilise base et hauteur mais je ne connais pas la hauteur du triangle PQM alors je l'ai éliminé ;*
- *l'autre la formule du Héron mais il faut connaître les trois côtés et je n'en connais que deux ;*
- *donc je me suis permis d'utiliser la troisième* **S** = $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

En admettant ce résultat, je trouve facilement les aires des trois triangles et du quadrilatère :

- *pour APM, je trouve* $\mathbf{S_1}$ = « texte caché » ;
- *pour BMQ, je trouve* $\mathbf{S_2}$ = « texte caché » ;
- *pour MPQ, je trouve* $\mathbf{S_3}$ = $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)$;
- *pour APQB, je trouve* $\mathbf{S_4}$ = « texte caché » = $\frac{1}{2}\sin(60)\times(x^2-x+1)$.

Étude de S_3.

a) *Sens de variation.*

Comme $\sin(60)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *, alors* $\frac{1}{2}x(1-x)\sin(60)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *c'est un polynôme du second degré donc sa courbe est une parabole* (Γ_3) *ici tournée vers le bas car* $a=-\frac{\sqrt{3}}{4}<0$.

b) *Coordonnées du sommet de* (Γ_3)

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0^2=0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=0$$

le polynôme s'annule en 0 et en 1 donc $x_S=\frac{0+1}{2}=0{,}5$ *et* $y_S=f(x_S)=f(0{,}5)=\frac{\sqrt{3}}{16}$.

- Utiliser les informations données par Alexis (cf. a) et b)) pour dresser le tableau de variation de la fonction f_3 définie sur [0 ; 1] par $f_3(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x-x^2)$.

Étude de S_4.

« texte caché »

- Exprimer S1 et S2 en fonction de x. En déduire que $\mathbf{S_4}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$.
- On note f_4 la fonction définie sur [0 ;1] par $f_4(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}$ et de courbe représentative (Γ_4). Trouver, dans l'intervalle [0 ; 1], deux nombres x_1 et x_2 et ayant la même image par f_4. En déduire le sommet de (Γ_4) et le tableau de variation de f_4.

Séance 5 : analyse de la production de Paul Alexandre

Comme je connais assez bien XCas (surtout l'instruction canonical_form() que j'ai utilisée l'année dernière), j'ai préféré utiliser XCas.

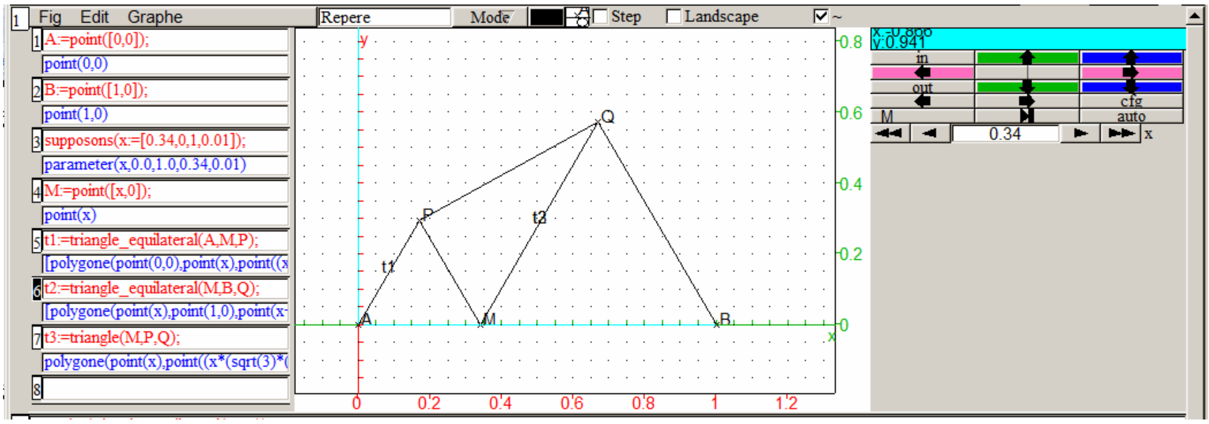
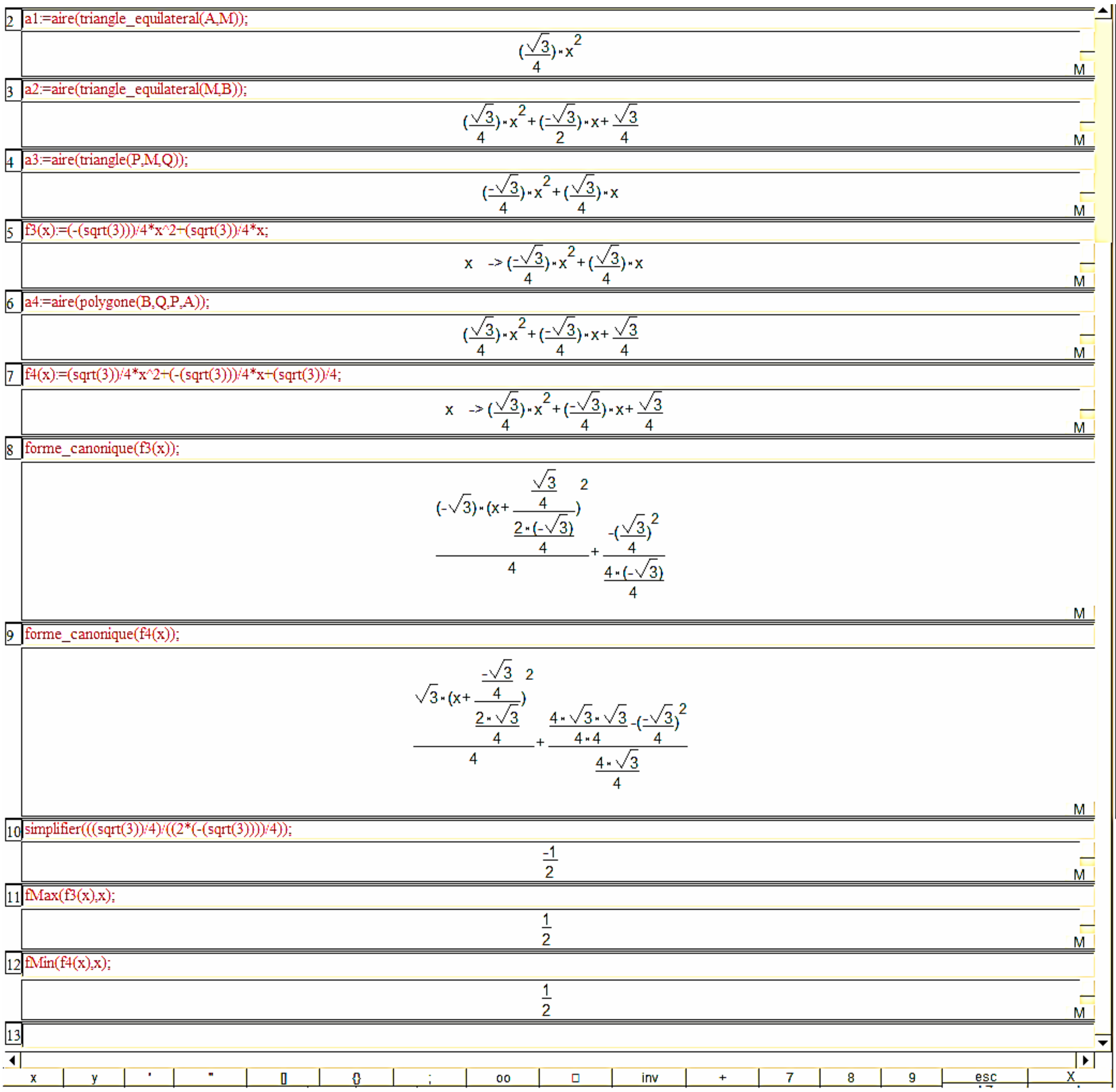


Fig Edit Graphe
Repere
Mode
Step
Landscape
A:=point([0,0]);
point(0,0)
B:=point([1,0]);
point(1,0)
supposons(x:=[0.34,0,1,0.01]);
parameter(x,0,0,1.0,0.34,0.01)
M:=point([x,0]);
point(x)
t1:=triangle_equilateral(A,M,P);
t2:=triangle_equilateral(M,B,Q);
t3:=triangle(M,P,Q);
in
out
cfg
auto
0.34


a1:=aire(triangle_equilateral(A,M));
a2:=aire(triangle_equilateral(M,B));
a3:=aire(triangle(P,M,Q));
f3(x):=(-(sqrt(3)))/4*x^2+(sqrt(3))/4*x;
a4:=aire(polygone(B,Q,P,A));
f4(x):=(sqrt(3))/4*x^2+(-(sqrt(3)))/4*x+(sqrt(3))/4;
forme_canonique(f3(x));
forme_canonique(f4(x));
simplifier(((sqrt(3))/4)/((2*(-(sqrt(3))))/4));
fMax(f3(x),x);
fMin(f4(x),x);

Commentaires

$\boxed{2}$ on retrouve la formule de l'aire d'un triangle équilatéral.

$\boxed{4}$ on reconnait un polynôme du second degré

$a \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $b \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$; $c \leftarrow 0$

$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ f_4 aussi est un polynôme du second degré

$a \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$; $b \leftarrow -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $c \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{4}$

Les paraboles sont tournées dans des sens opposés.

$\boxed{8}$ Le résultat est monstrueux, je n'ai pas réussi à faire mieux, ça tourne en rond mais, on voit bien qu'on peut simplifier :

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2 \times \frac{-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{-2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{cf. } \boxed{10}$$

et

$$\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\cancel{4} \times \frac{(-\sqrt{3})}{\cancel{4}}} = +\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

En résumé, la forme canonique de f_3 est :

$$f_3(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{16} \quad \text{donc,}$$

$$f_3(x) \leqslant f_3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le maximum de f_3 est $\frac{\sqrt{3}}{16}$ atteint en $\frac{1}{2}$.

Ce qui est conforme à la ligne $\boxed{11}$.

- Extraire des documents livrés par Paul-Alexandre, les informations relatives à la forme canonique de f_3.
- A la manière de Paul-Alexandre, simplifier le résultat retourné ligne 9 pour en déduire la forme canonique de f_4.
- En développant, vérifier les calculs relatifs à f_4.
- Utiliser Xcas pour obtenir la forme canonique du polynôme $x^2 - x + 1$. Vérifier ce résultat en développant. En déduire son minimum et son tableau de variation.
- Recommencer avec le trinôme $-x^2 + x$.
- Critiquer la démarche de Paul-Alexandre.

Ici, j'ai remarqué quelque chose de bizarre, il faut faire attention à l'ordre des points…

13 aire(triangle(P,M,Q));

$$(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x$$

14 aire(triangle(Q,M,P));

$$(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x$$

15 simplifier(aire(triangle(P,M,Q))+aire(triangle(Q,M,P)));

$$0$$

16 aire(polygone(B,Q,P,A));

$$(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

17 aire(polygone(A,P,Q,B));

$$(\frac{-\sqrt{3}}{4})\cdot x^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot x+\frac{-\sqrt{3}}{4}$$

18 simplifier(aire(polygone(B,Q,P,A))+aire(polygone(A,P,Q,B)));

$$0$$

- Commenter cette dernière remarque de Paul-Alexandre.

Remarque :

L'analyse de la production de Paul-Alexandre est plus difficile. Elle pourra n'être proposée qu'à certains groupes, ou en accompagnement personnalisé.

Évaluation des acquis des élèves.

Extrait des programmes des premières S, ES et L :

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

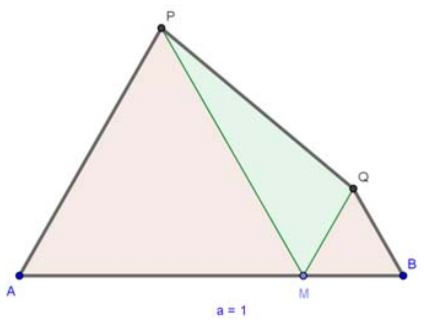
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

L'évaluation proposée se déroule en deux parties. La première partie permet une évaluation de certaines compétences citées dans les programmes, en incitant l'élève à s'auto-évaluer. La deuxième partie fait le point sur les connaissances acquises par les élèves à la fin de l'activité.

Texte de l'évaluation

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1, AMP et MBQ sont équilatéraux.

1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP



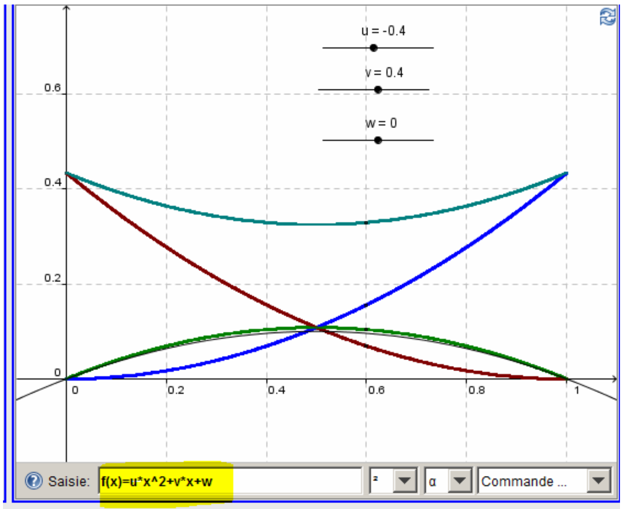
Première partie de l'évaluation (20mn – 8 points)

- En un maximum de 10 lignes, en guise de conclusion de l'étude : donner le point qui vous a semblé le plus délicat à traiter ou qui a posé le plus de difficultés ainsi que le point sur lequel vous avez le plus progressé. Justifier vos choix.

  Aucun développement mathématique n'est demandé.

- En un maximum de 15 lignes, proposer ce qui vous parait-être une démarche « idéale » de résolution du problème. On sera amené à se souvenir des points positifs et négatifs des différentes démarches des cinq élèves.

  Aucun développement mathématique n'est demandé.



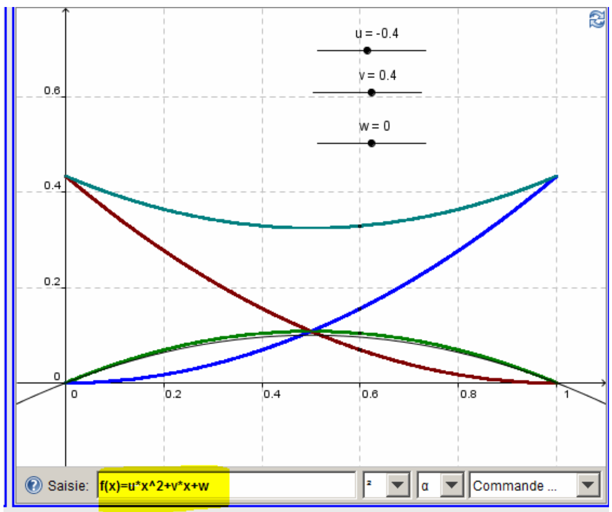
Seconde partie de l'évaluation (35 minutes - 12 points)

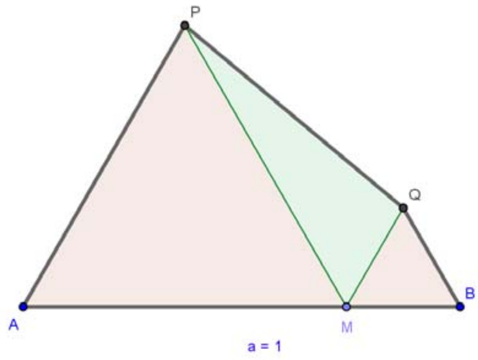
1. Associer les courbes et les aires des polygones AMP, MBQ, MQP et APQB. Découper, coller, légender. On ne demande aucune justification.
2. On pose AM=x, exprimer l'aire du triangle AMP en fonction de x. Justifier.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(x - x^2\right)$. On admet qu'une des courbes ci-contre représente cette fonction.

3. Utiliser le tableau de variation de f pour justifier le choix de la courbe associée à cette fonction.

Question de synthèse : énoncer différentes méthodes permettant de déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole quelconque. Structurer la réponse.





Remarque :

Afin de construire rapidement le cours sur le second degré, le professeur a fait le choix de donner les figures nécessaires aux élèves.

Un prolongement possible de cette activité est la construction de la figure de l'exercice à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Le baby-boom

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.

Série : toutes séries.

Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Réactiver les connaissances sur le second degré. Modéliser une situation.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'écrit.
Connaissances	La parabole. Statistiques.
Modalités de gestion de classe	Travail en groupes. Activité en autonomie.

Scénario pédagogique

Situation (fiche élève)

- Consignes données à l'élève :
Modéliser l'évolution des naissances lors de la période du baby-boom au Canada par une fonction polynôme du second degré.
Mesurer l'intérêt de cette modélisation par l'estimation du nombre de naissances en 1970.
Rédiger un compte-rendu de cette activité présentant conclusions et démarches.

- Supports et ressources de travail :
Tableur et/ou calculatrice.
Les données proviennent du site « CANSIM sur E-STAT ».

Années	Estimation naissances
1950	372009
1951	381092
1952	403559
1953	417884
1954	436198
1955	442937
1956	450739
1957	469093
1958	470118
1959	479275
1960	478551
1961	475700
1962	469693
1963	465767
1964	452915

Années	Estimation naissances
1965	418595
1966	387710
1967	370894
1968	372009
1969	369647
1970	371988
1971	362187
1972	347319
1973	343373
1974	350650
1975	359323
1976	359987
1977	361400
1978	358852
1979	366064

Années	Estimation naissances
1980	370709
1981	371346
1982	373082
1983	373689
1984	377031
1985	375727
1986	372913
1987	369742
1988	376795
1989	392661
1990	405486
1991	402533
1992	398643
1993	388394
1994	385114

Années	Estimation naissances
1995	378016
1996	366200
1997	348598
1998	342418
1999	337249
2000	327882
2001	333744
2002	328802
2003	335202
2004	337072
2005	342176
2006	354617
2007	367864
2008	374595
2009	380535

Aide ou « coup de pouce »

- **Vérification de la bonne compréhension :**

Pour inciter les élèves à reformuler la consigne, on pourra leur poser quelques questions :

- ◦ Qu'est-ce que le baby-boom ? À quelle période se situe-t-il au Canada ?
- ◦ Quel est le travail à effectuer ? Que demande-t-on de réaliser ? D'estimer ?
- ◦ Quelles informations nous donnent les ressources proposées ?

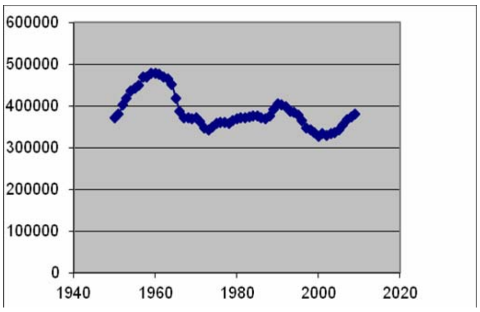
- **Aide à la démarche de résolution :**
  - ◦ Comment peut-on afficher un nuage de points sur l'écran de la calculatrice ? À l'aide du tableur ?
  - ◦ Comment afficher à l'écran une courbe de tendance ? Comment obtenir son équation ?
- **Apport de connaissances et de savoir-faire :**
  - ◦ Comment établir le lien entre la parabole et les coefficients a, b et c de la fonction polynôme du second degré ?

Pour aller plus loin (approfondissements et prolongements possibles) :

- Établir une étude statistique permettant de comparer les naissances au Canada et dans les pays d'Europe entre 1950 et 1968. S'appuyer sur le site de l'INSEE.
- Des phénomènes de baby-boom se retrouvent-ils sur le vieux continent ?
- Existe-t-il des périodes de l'histoire de France où l'on a pu constater des phénomènes comparables, où la courbe des naissances est modélisable par une parabole ?

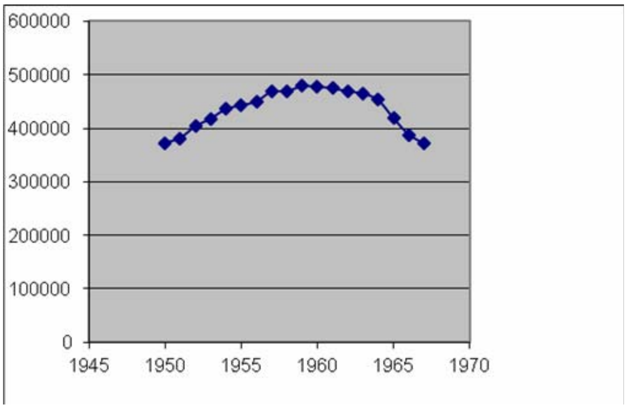
Compte-rendu des activités des élèves

Dans un premier temps, les élèves représentent le nuage de points de coordonnées (année, nombre de naissances). Le nuage obtenu est le suivant :



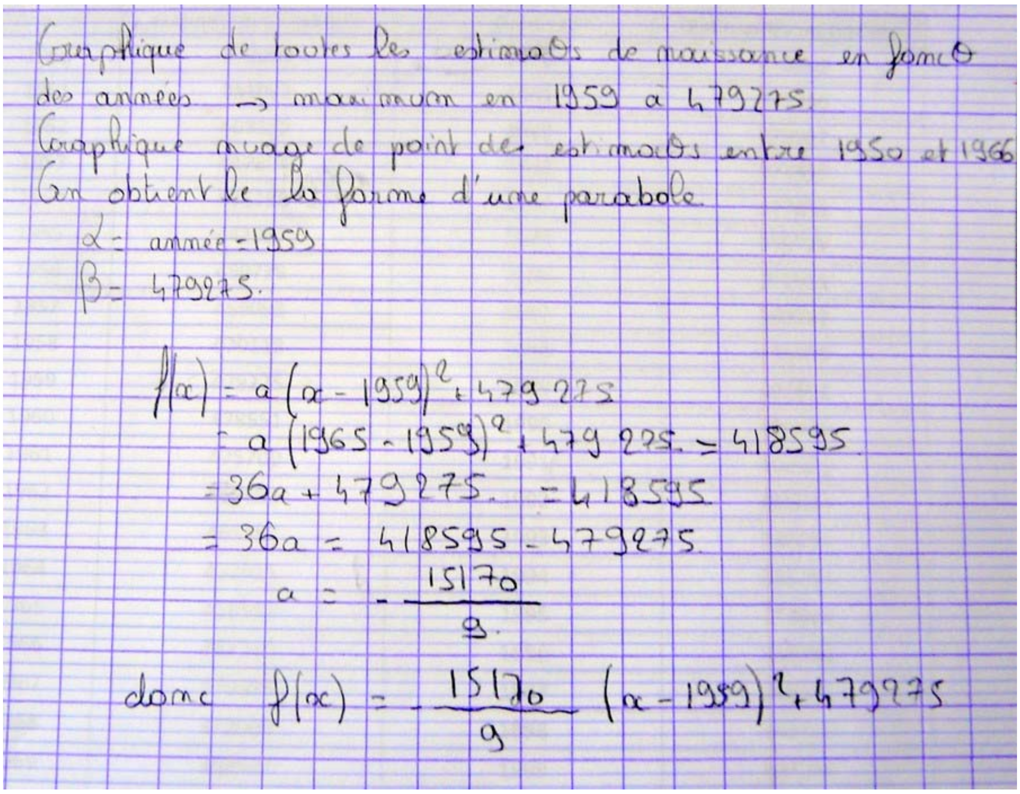
Une des élèves de la classe, Élodie, annonce : « Le baby-boom semble être situé entre 1950 et 1967 ». Elle décide donc de ne garder que les valeurs correspondantes.

Elle obtient le nuage de points suivant :



Le professeur donne la consigne de décrire les éléments de recherche qui permettent de modéliser mathématiquement cette situation.

Les élèves travaillent en autonomie. On obtient diverses productions parmi lesquelles les deux suivantes :



Graphique de toutes les estimatOs de naissance en fonctO des années → maximum en 1959 à 479275

Graphique nuage de point des estimatOs entre 1950 et 1966

On obtient le la forme d'une parabole

α = année = 1959

β = 479275

$$f(x) = a(x-1959)^2 + 479275$$

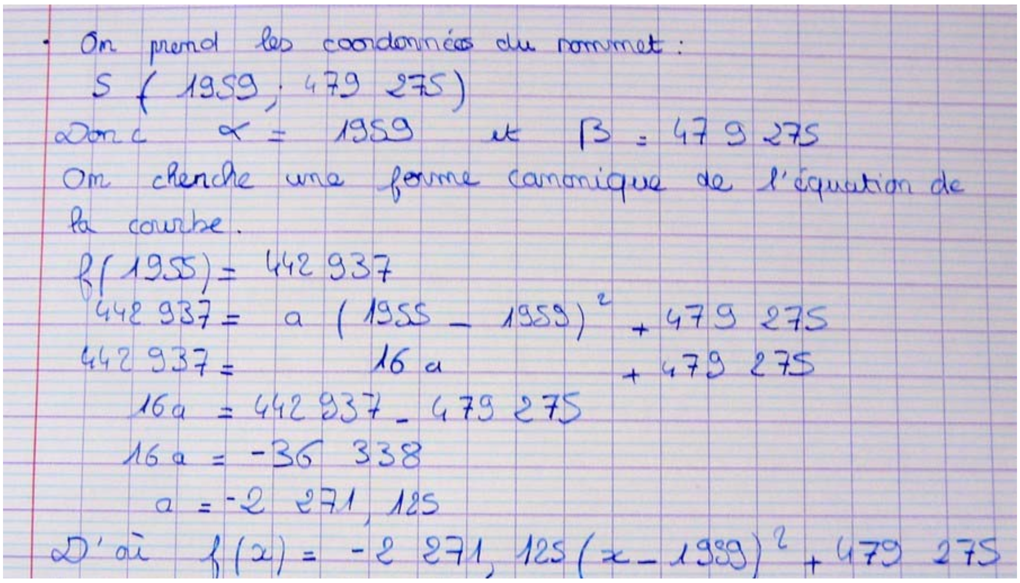
$$= a(1965-1959)^2 + 479275 = 418595$$

$$= 36a + 479275 = 418595$$

$$= 36a = 418595 - 479275$$

$$a = -\frac{15170}{9}$$

donc $f(x) = -\frac{15170}{9}(x-1959)^2 + 479275$



• On prend les coordonnées du sommet :

S (1959 ; 479 275)

Donc $\alpha = 1959$ et $\beta = 479\,275$

On cherche une forme canonique de l'équation de la courbe.

$f(1955) = 442\,937$

$442\,937 = a\,(1955 - 1959)^2 + 479\,275$

$442\,937 = 16\,a + 479\,275$

$16a = 442\,937 - 479\,275$

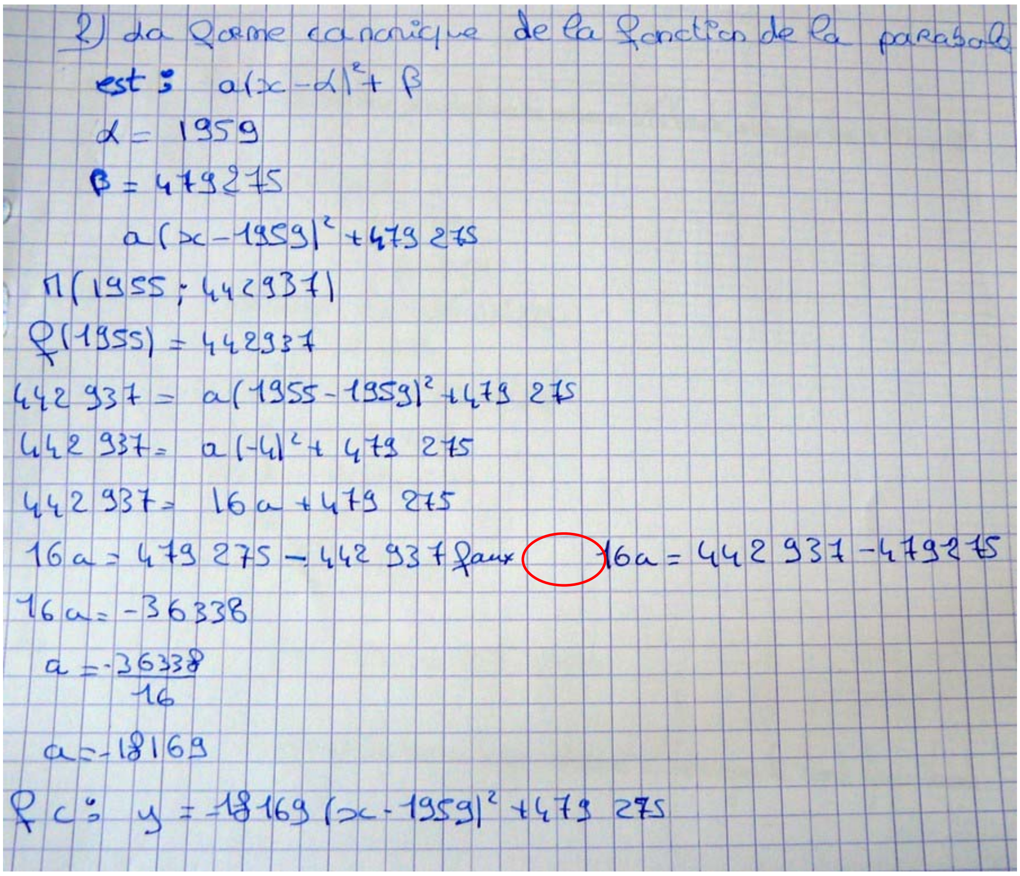
$16\,a = -36\,338$

$a = -2\,271,125$

D'où $f(x) = -2\,271,125\,(x - 1959)^2 + 479\,275$

Il s'ensuit un travail collectif sur la qualité de la communication écrite.

Le professeur a repéré un certain nombre d'erreurs dans la production suivante :



2) La forme canonique de la fonction de la parabole est : $a(x-\alpha)^2+\beta$

$\alpha = 1959$

$\beta = 479275$

$a(x-1959)^2+479\,275$

M(1955 ; 442937)

$f(1955) = 442937$

$442\,937 = a(1955-1959)^2+479\,275$

$442\,937 = a(-4)^2+479\,275$

$442\,937 = 16a+479\,275$

$16a = 479\,275 - 442\,937$ faux $16a = 442\,937 - 479275$

$16a = -36338$

$a = -\frac{36338}{16}$

$a = -18169$

f c : $y = -18169\,(x-1959)^2+479\,275$

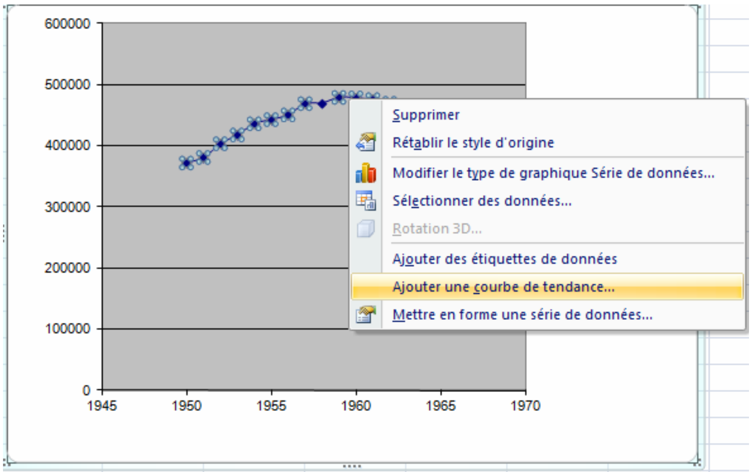
Par un questionnement ouvert, l'enseignant amène l'élève à critiquer sa production. Ce dernier constate immédiatement que le coefficient *a* est en contradiction avec l'allure de la courbe obtenue au tableur :

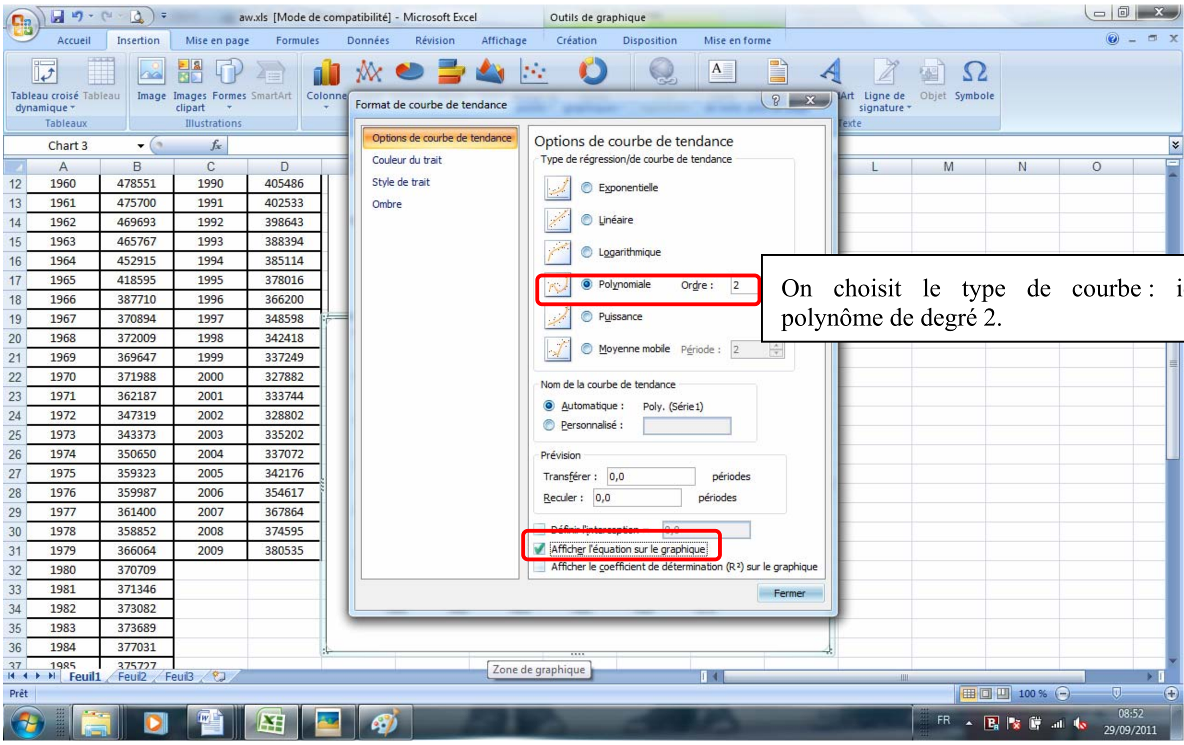
« La parabole est tournée vers le bas donc le coefficient de x² doit être négatif. Celui que j'obtiens est positif. J'ai fait une erreur de signe ».

L'élève rectifie mais commet maintenant une erreur de calcul suite à une mauvaise manipulation des touches de la calculatrice. C'est l'occasion pour le professeur de travailler l'ordre de grandeur et le calcul mental réfléchi (Quel est le rapport entre 36000 et 18000 ? Comment diviser mentalement par 16 ?...).

Un temps d'échange collectif amène le professeur à présenter une nouvelle fonctionnalité du tableur : la courbe de tendance.

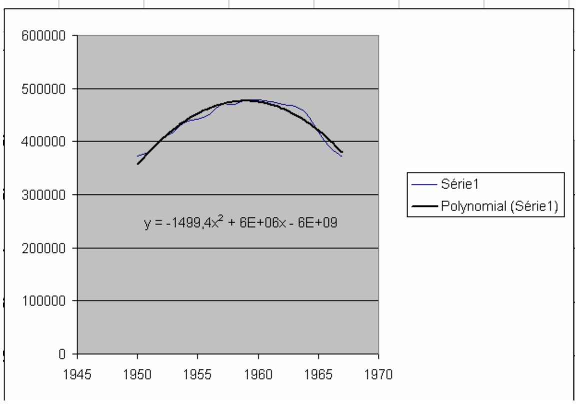
À l'aide d'un clic droit, on fait apparaître :





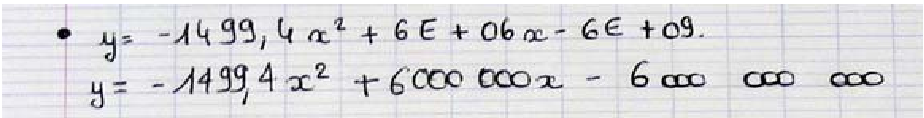
On choisit le type de courbe : ici polynôme de degré 2.

On obtient la courbe suivante :

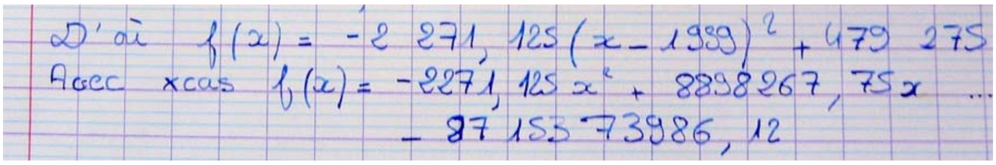


Question du professeur : « Comment comparer l'équation de la parabole que vous avez déterminée avec celle obtenue à l'aide du tableur ? »

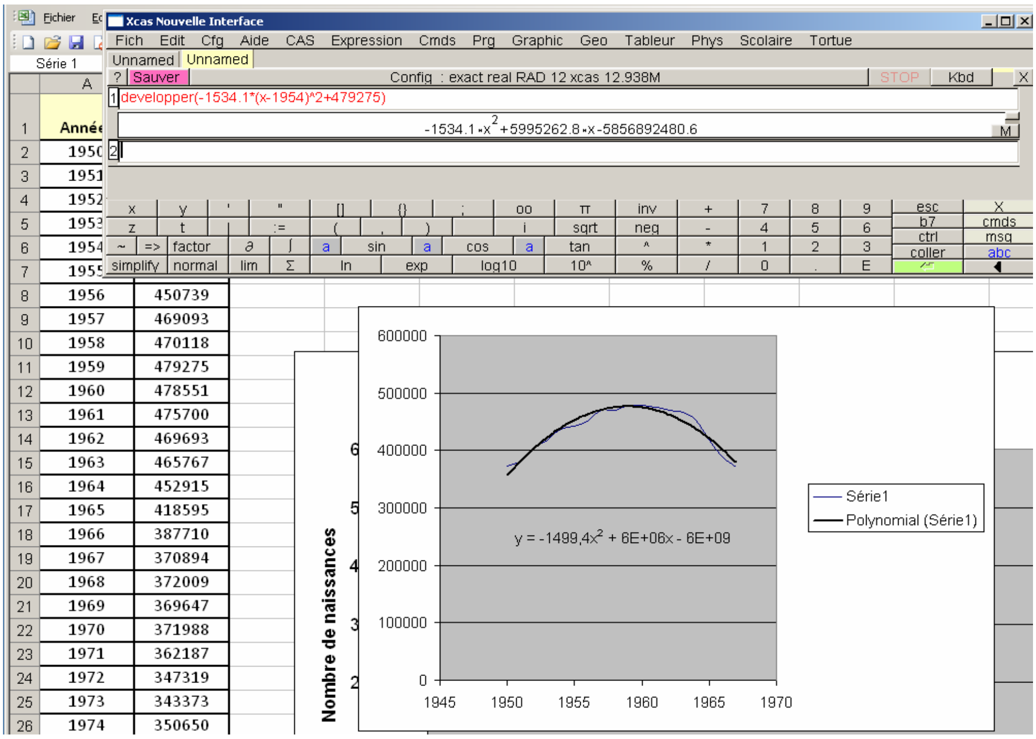
Traduction de l'équation :



Une autre rédaction :



Une comparaison visualisée sur une réponse d'élève :



Pour aller plus loin…

« Comparer les résultats obtenus pour l'évaluation du nombre de naissances à l'aide des deux modélisations ».

Une histoire de paraboles

Problématiques développées : P2, P3, P5 et P6.
Série : S.
Place dans la progression : après le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Objectifs pédagogiques	Résoudre un problème traitant du second degré avec les TICE.
Compétences	Mettre en œuvre une recherche de manière autonome. Avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus. Communiquer à l'oral.
Connaissances	La parabole.
Logiciels	Logiciel de géométrie dynamique. Tableur.
Modalités de gestion de classe	Activité en autonomie. Travaux pratiques.

<u>Fiche élève : trajectoire du sommet d'une parabole</u>

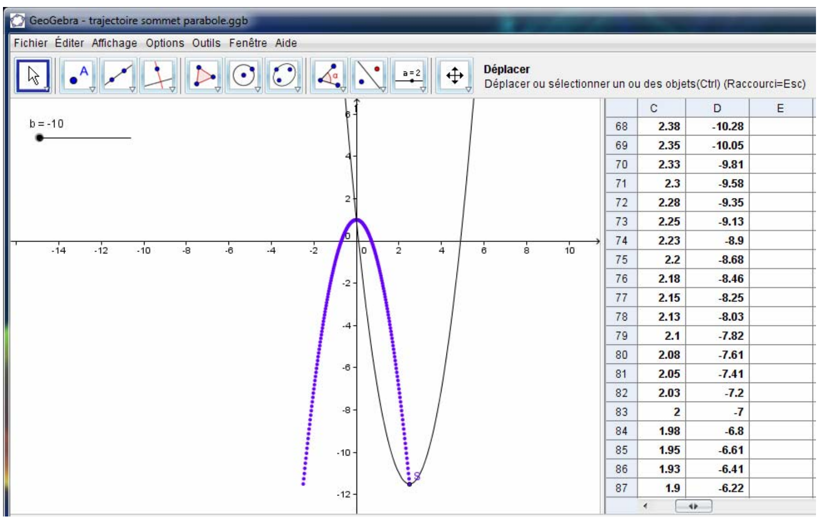
Consignes données à l'élève : traiter le TP en respectant les appels au professeur.

L'objet de ce TP est de conjecturer le lieu du sommet S de la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation $y = 2x^2 + bx + 1$ où b est un nombre réel.
Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
Appeler le professeur pour valider la construction.
En faisant varier b, observer les déplacements du point S et répondre au problème.
Appeler le professeur pour valider la construction.
A l'aide d'un tableur saisir les coordonnées de S lorsque b varie et conjecturer l'équation de la courbe obtenue.

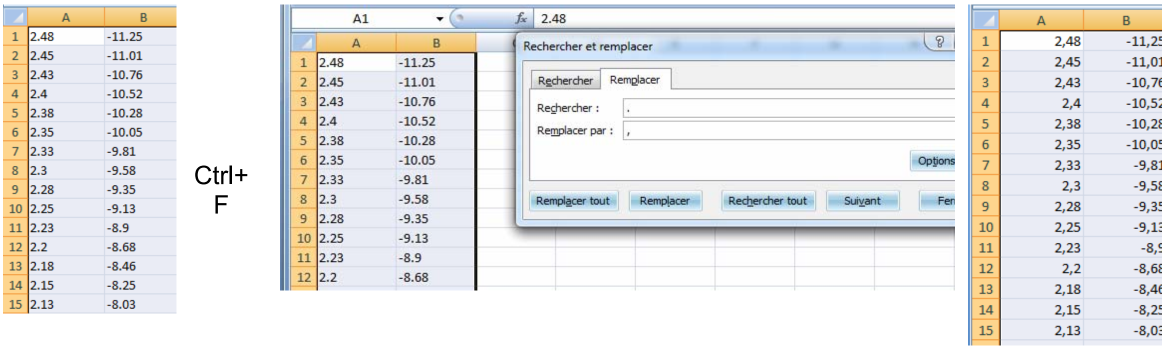
<u>Prolongements possibles :</u>

- Dans le cadre du TP, on peut demander à examiner le même problème avec la parabole d'équation $y = ax^2 + x + 2$ où a est un nombre réel.
- Dans le cadre d'un devoir en temps libre, le professeur demande de rédiger la démonstration qui permet de valider ou de rejeter la conjecture concernant le lieu du sommet S de la parabole ($\mathcal{P}$).

<u>Éléments de réponses pour le TP :</u>



Indication :
On pensera à transformer les formats d'écriture des nombres extraits du tableur-*GeoGebra* par la fonction : Ctrl + F (passage du point au point décimal ou virgule)

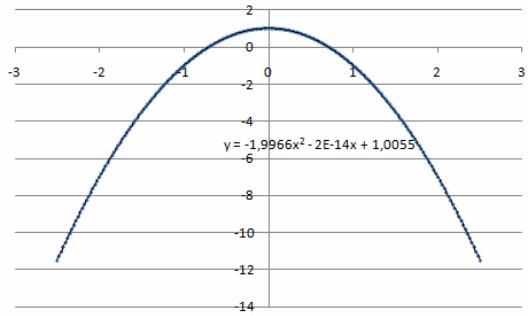


	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68
13	2.18	-8.46
14	2.15	-8.25
15	2.13	-8.03

	A	B
1	2.48	-11.25
2	2.45	-11.01
3	2.43	-10.76
4	2.4	-10.52
5	2.38	-10.28
6	2.35	-10.05
7	2.33	-9.81
8	2.3	-9.58
9	2.28	-9.35
10	2.25	-9.13
11	2.23	-8.9
12	2.2	-8.68

	A	B
1	2,48	-11,2
2	2,45	-11,0
3	2,43	-10,7
4	2,4	-10,5
5	2,38	-10,2
6	2,35	-10,0
7	2,33	-9,81
8	2,3	-9,58
9	2,28	-9,3
10	2,25	-9,1
11	2,23	-8,9
12	2,2	-8,68
13	2,18	-8,46
14	2,15	-8,2
15	2,13	-8,0

On obtient une idée de l'équation de la trajectoire du sommet en utilisant la courbe de tendance.



<u>Une production écrite :</u>

$y = 2x^2 + bx + 1.$

Je cherche l'abscisse du sommet de la parabole :

$x = \frac{-b}{2a}$ soit $x = \frac{-b}{4}.$

Je calcule son ordonnée :

$y = 2 \times \frac{-b^2}{4} + b \times \frac{-b}{4} + 1$

$= \frac{-2b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + 1.$

$= \frac{-b^2}{2} - \frac{b^2}{4} + 1$

$= \frac{-3b^2}{4} + 1$

J'exprime b en fonction de x : $b = -4x$.

Je remplace donc b par $-4x$ dans y.

$y = \frac{-3(-4x)^2}{4} + 1$

$= \frac{-48x^2}{4} + 1$

$= -12x^2 + 1$

Je ne retrouve pas la réponse que j'attends. J'ai du faire une erreur mais je ne retrouve pas laquelle.