BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Électronique

Génie Électrotechnique

Génie Optique

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats

Ce sujet comporte 5 pages numérotées 1/5 à 5/5

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité 4 cm).
On considère les trois nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1) Ecrire z_2 sous forme exponentielle.

2) a) Écrire z_3 sous forme exponentielle

b) En déduire que $z_3 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) a) En remarquant que $z_1 = z_2 \times z_3$, donner l'écriture de z_1 sous forme algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4) a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

b) On désigne par I le point d'affixe 1.
Placer le point I et préciser la nature du triangle OIB.

5) On désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Quelles sont les images respectives des points I et B par R ?

b) En déduire la nature du triangle OAC.

Exercice 2 : (4 points)

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu une animation qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
La partie est organisée selon les règles suivantes :
On mise 3 euros puis on lance le dé;

- pour la sortie du 6, on reçoit 10 euros ;
- pour la sortie du 5, on reçoit 4 euros ;
- pour la sortie du 4, on reçoit 1 euro ;
- dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain algébrique d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

Partie A :

1) On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain algébrique.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique E(X).

d) Le comité d'organisation prévoit la réalisation de 150 parties réalisées lors de cette fête.
Quelle bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

2) Un joueur se présente, il dispose de 4 euros.
Déterminer la probabilité P que ce joueur puisse jouer deux parties.

Partie B :

Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable.
La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée.

Déterminer cette nouvelle mise x qui rend le jeu équitable.

Problème :(11 points)

Partie A :

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$.
On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Cette courbe est donnée sur la feuille annexe.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

2) a) Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante: $f(x) = e^{-x}\left(1 + 2xe^{x} - 2e^{x}\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$).

3) Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$

a) Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2e^{x} - 1}{e^{x}}$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 1].
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5) On considère le point A de la courbe (C) d'abscisse $-\ln 3$.

a) Calculer la <u>valeur exacte</u> de l'ordonnée du point A.

b) On note (T) la tangente à la courbe (C) au point A.
Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) vaut -1.

6) Sur le graphique donné (feuille annexe), tracer les droites (D) et (T).

Partie B

1) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -e^{-x} + x^2 - 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit (E) le domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$,
Hachurer le domaine (E).
Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine (E) en unités d'aire, calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.
Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près.

3) Calculer la valeur moyenne μ de f sur [1 ; 3]. Interpréter graphiquement cette valeur.

Annexe à rendre avec la copie