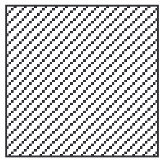
IRRATIONALITE DE $\sqrt{2}$

I. INTRODUCTION

Comment doubler une figure carrée ?

IV siècles avant notre ère, PLATON se fait l'écho, dans un de ses dialogues intitulé *Ménon*[1], des difficultés arithmétiques rencontrées par les pythagoriciens :

Socrate, un jour, fait venir un esclave, trace sur le sol un carré de côté deux pieds et lui demande de trouver le côté d'un carré d'aire double.



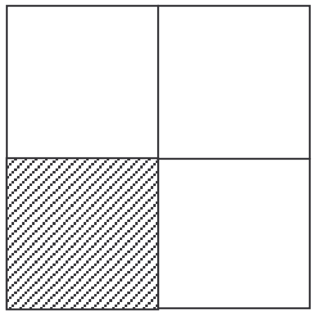
Première réponse de l'esclave : Il faut doubler le côté du carré !

Guidé par Socrate l'esclave se rend compte qu'en doublant le côté du carré il a quadruplé l'aire du carré au lieu de la doubler. Justifier.

Le carré de côté quatre pieds est donc trop grand, il faut pourtant prendre plus de deux pieds : il ne reste qu'à essayer trois pieds qui à son tour ne convient pas. Justifier.

C'est l'impasse et l'esclave s'énerve un peu : « Mais par Zeus, Socrate, je ne le sais pas ! »

Pourtant Socrate lui avait suggéré d'abandonner la perspective numérique : « et si tu préfères ne pas donner un chiffre, montre en tout cas à partir de quelle ligne on l'obtient ».
Socrate accole alors trois carrés au carré initial pour former un carré quatre fois plus grand.
Le problème, géométrique cette fois-ci, revient à tracer un carré qui soit la moitié de ce nouveau carré. Pourquoi ?



Or, une diagonale partage un carré en deux parties égales : il suffit donc de partager chacun des quatre carrés par une diagonale judicieusement choisie.
L'esclave voit enfin une solution au problème posé. Laquelle ?

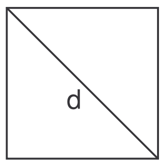
Justifier que le quadrilatère ainsi obtenu est bien un carré dont l'aire est double de celle du carré tracé initialement par Socrate.

Grandeurs incommensurables

On ramène le carré tracé au sol par Socrate à un carré de côté c.

1. Montrer que le problème posé se résume alors à trouver un nombre d tel que $d^2 = 2c^2$.
2. Quelle doit être la valeur du rapport d/c ?

L'impasse arithmétique des premières recherches de l'esclave vient du fait qu'il n'existe pas d'entiers ou de fraction d'entiers d tel que $d^2 = 2c^2$.
Il s'agit de l'impossibilité de mesurer la diagonale du carré avec une portion du côté.
On parle de grandeurs incommensurables.



---

[1] Cf PLATON, *Ménon*, 82 b - 85 c, p 251 - 257

Historique

XVII^e siècle av J.-C.	Un scribe babylonien a dessiné un carré sur lequel figure, dans la numération sexagésimale le rapport de la diagonale et du côté du carré : 1,24 ; 51 ; 10. Quel est l'ordre de cette approximation de $\sqrt{2}$?
VI^e siècle av J.-C.	PYTHAGORE, dont le principe fondateur est « tout est nombre », donne une interprétation mystique aux nombres attribuant un nombre à chaque chose. L'univers, la musique, les harmonies et les oppositions sont réglées par les nombres entiers et les rapports d'entiers. Construire un carré de côté 5 cm puis mesurer la diagonale de ce carré. Que semble valoir le rapport $\frac{d}{c}$? Construire un carré de côté 10 cm puis mesurer la diagonale de ce carré. Que semble valoir le rapport $\frac{d}{c}$? Construire un carré de côté 8 cm puis mesurer la diagonale de ce carré. Que semble valoir le rapport $\frac{d}{c}$? Pythagore et ses disciples pensaient que le rapport $\frac{d}{c}$ était égal à $\frac{7}{5}$. Expliquer. Quel est l'ordre de cette approximation de $\sqrt{2}$? HIPPASE DE METAPONTE, disciple de Pythagore, découvre l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré ce qui crée une véritable crise au sein des pythagoriciens. La légende dit qu'il aurait été condamné à la noyade pour avoir révélé le secret de l'existence des tels nombres.
IV^e siècle av J.-C.	ARISTOTE énonce les grandes lignes d'une démonstration arithmétique par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
III^e siècle av J.-C.	EUCLIDE publie dans le livre X de ses *Eléments* une version détaillée de cette démonstration.
II^e siècle av J.-C.	THEON DE SMYRNE tente de donner à ces nombres une réalité physique, naturelle, et en même temps, une réalité rationnelle.
1864 - 1868	WEIERSTRASS définit les nombres ‘’ irrationnels ‘’ comme agrégats d'une infinité de nombres rationnels.

1869	MERAY publie la première construction rigoureuse des nombres ''irrationnels'' appelés « quantités incommensurables ». Il introduit la notation $\sqrt{a}$ pour désigner « la racine carré du nombre a ».
1872	DEDEKIND établit une analogie entrer les nombres rationnels et les points d'une droite ordonnée à partir d'un point origine. Il crée les *nombres irrationnels* en tant que « coupure » dans l'ensemble des nombres rationnels. Il rassemble les nombres rationnels et irrationnels sous le vocable de *nombres réels*.
1998	KANADA et TAKAHASHI détiennent le record de l'approximation de $\sqrt{2}$ avec 137 438 953 444 décimales (7,5 heures des calcul).

II. PREUVE DE L'IRRATIONALITE DE $\sqrt{2}$

Principe d'un raisonnement par l'absurde ?

Démonstration par l'absurde

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

1. Définir les nombres rationnels.

   Justifier qu'il existe deux entiers naturels non nuls ***p*** et ***q***, premiers entres eux, tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

2. En déduire que $p^2 = 2q^2$.

   Que peut-on alors dire du chiffre des unités de p^2 et de $2q^2$?

3. Compléter les tableaux suivants :

Le nombre ***p*** se termine par	…
Le nombre p^2 se termine par	…

Le nombre ***q*** se termine par	…
Le nombre q^2 se termine par	…
Le nombre $2q^2$ se termine par	…

4. Déduire des questions 3. et 4. quels sont les cas possibles pour ***p*** et ***q***.

   Où est la contradiction ?

5. Conclure.

III. Approximation de $\sqrt{2}$

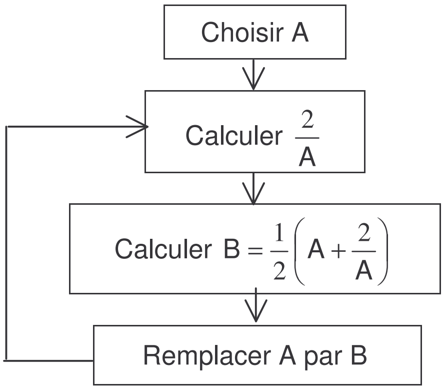
Construction géométrique du point d'abscisse $\sqrt{2}$ à la règle et au compas

On considère une droite D munie d'un repère (O ; I) (unité 10 cm).

Trouver une construction qui permette de placer précisément sur D le point M d'abscisse $\sqrt{2}$.

Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron d'Alexandrie

Le but de cette partie est de calculer des approximations de $\sqrt{2}$ par des nombres rationnels de plus en plus précises. L'algorithme est décrit ci-contre.



A est un réel strictement positif.

B est la moyenne arithmétique de A et de $\frac{2}{A}$

Prenons par exemple A = 1.

1. a. Placer sur la droite D le point d'abscisse A.

   b. Calculer $\frac{2}{A}$ et placer sur la droite D le point d'abscisse $\frac{2}{A}$.

   En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux nombres rationnels.

   c. Calculer $B = \frac{1}{2}\left(A + \frac{2}{A}\right)$ et placer sur la droite D le point d'abscisse B.

   En déduire un encadrement encore meilleur de $\sqrt{2}$ par deux nombres rationnels.

2. Reprendre les questions **1.a.**, **1.b.** et **1.c.** en prenant à chaque fois pour A la valeur trouvée à la question **1.c.**
   A partir de combien d'étapes retrouve-t-on la valeur approchée de $\sqrt{2}$ donnée par la calculatrice ?
3. Entrer le programme donné ci-contre dans votre calculatrice.
   Le faire fonctionner pour différentes valeurs de A.
4. Que se passe-t-il si on prend $A = \sqrt{2}$?

```
MENU 6
F3 (New)
Entrer un titre EXE
1→A↵
"N" ?→N↵
For 0→M To N↵
(A+2⌋A)⌋2→A↵
Next↵
```

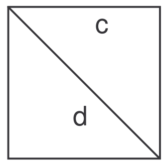
Autre méthode d'approximation de $\sqrt{2}$

Trouver une autre méthode permettant de trouver des approximations de $\sqrt{2}$.

Donner et expliquer l'algorithme de calcul.

Comparer avec la méthode de Héron d'Alexandrie.

Ce que croyaient les pythagoriciens



1. Construire un carré de côté 5 cm puis mesurer la diagonale de ce carré.

   Que semble valoir le rapport $\frac{d}{c}$?

2. Construire un carré de côté 10 cm puis mesurer la diagonale de ce carré.

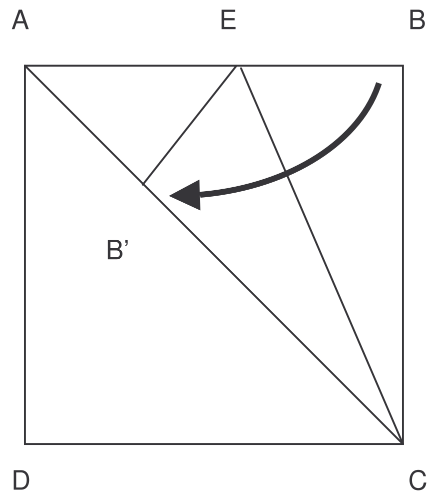
   Que semble valoir le rapport $\frac{d}{c}$?

3. Construire un carré de côté 8 cm puis mesurer la diagonale de ce carré.

   Que semble valoir le rapport $\frac{d}{c}$?

4. Pythagore et ses disciples pensaient que le rapport $\frac{d}{c}$ était égal à $\frac{7}{5}$. Expliquer.

Pourquoi réfuter l'idée ?



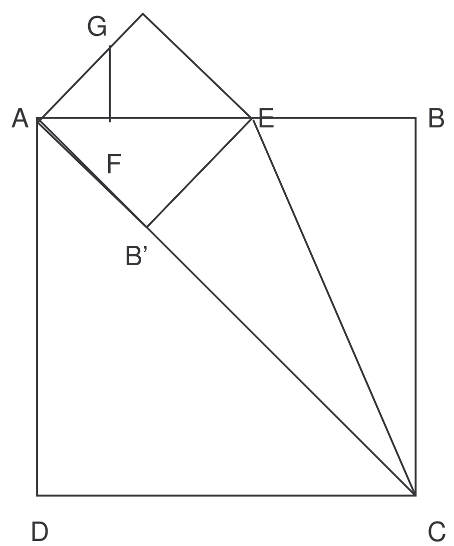
On suppose que $\frac{d}{c} = \frac{7}{5}$ et on considère le carré ABCD de côté 5 cm.

1. Que vaut alors la longueur AC ?

On replie le côté [BC] sur la diagonale [AC] ;
Le point B vient alors en B'.

2. Déterminer les longueurs B'C et AB'.

3. Préciser les mesures des angles AB'E, B'AE et B'EA.
   En déduire la nature du triangle AB'E,
   ainsi que les longueurs B'E, BE et AE.



B'' est le point tel que AB'EB'' soit un carré.
On replie le côté [EB''] sur [AE], le point B'' vient en F.

4. Déterminer les longueurs EF et AF.

5. Préciser les mesures en degré des angles GFA, AGF et GAF.
   En déduire la nature du triangle AGF,
   ainsi que les longueurs AF, GF et AG.

6. Quelle est la contradiction obtenue ?
   Quelle hypothèse doit-on rejeter ?